Written according to the approved revised new Syllabus of the West Bengal Board of Secondary Education, this book is meant to be a text book for **Class X** *of all Secondary Schools in West Bengal and Tripura*
[Vide letter No. 10015/G. Dated 18. 7. 73.]

মাধ্যমিক জ্যামিতি

[জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি]

(দশম শ্রেণী)

ডক্টর মৃদুল সেন
গণিত বিভাগ, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়।

ও

কৃষ্ণপদ গাঙ্গুলী, এম্-এস-সি, বি. এড.
প্রধান শিক্ষক, মধ্যমগ্রাম উচ্চবিদ্যালয় ;
ভূতপূর্ব গণিত শিক্ষক, দমদম মতিলাল বিদ্যায়তন।

নিউ বুক এজেন্সী
১৮/বি, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০১২

প্রকাশক ঃ
শ্রীহেমচন্দ্র বিশ্বাস
১৮/বি, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০১২

প্রথম মুদ্রণ ঃ ডিসেম্বর, ১৯৭৪
দ্বিতয় মুদ্রণ ঃ ডিসেম্বর, ১৯৭৫
পরিশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ
জানুয়ারী, ১৯৭৬

মূল্য ঃ পাঁচ টাকা সত্তর পয়সা মাত্র।

মুদ্রাকর ঃ
শ্রীতুলসীচরণ বক্সী
ন্যাশনাল প্রিন্টিং ওয়ার্কস
৩৩/ডি, মদন মিত্র লেন
কলিকাতা-৭০০০০৬

SYLLABUS IN GEOMETRY (30 *marks*)

CLASS X

(*Revised*)

1. Revision of previous work.

2. To prove :

(a) There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line.

(b) A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord and conversely.

(c) The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of circumference.

(d) Angles in the same segment of a circle are congruent and if the line segment joining two points subtends congruent angles at two other points on same side of it, the four points lie on a circle.

(e) The angle in a semicircle is a right angle.

(f) The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

(g) (i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) The segment of two tangents of a circle from external point to the points of contact are congruent and they subtend congruent angles at the centre.

(iii) If two circles touch, the point of contact lies on the straight line through the centres.

3. Simple idea of similarity transformations through activity—their properties.

4. To prove :

(i) If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle, the other two sides are divided proportionally and the converse.

(ii) If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional and the converse.

(iii) If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

(iv) Pythagoras' theorem and its converse.

5. Constructions :

(i) To draw a circle about a triangle.

(ii) To draw a circle in a triangle.

(iii) To draw mean proportional.

MENSURATION (10 *marks*)

1. Revision of previous work.

2. Surface and volume of Rectangular Parallelopiped, Cylinder and Sphere.

TRIGONOMETRY (15 *marks*)

1. Idea of trigonometrical angles.

2. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles—0°, 30°, 45°, 50°, 90° (undefined values such as tan 90°, cot 0° to be excluded).

3. Trigonometrical ratios of complementry angles.

4. Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right angled triangles involving the standard angles above.

সূচীপত্র

জ্যামিতি

পরিমিতি

ত্রিকোণমিতি

জ্যামিতি

উপক্রমণিকা

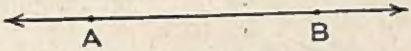
নব প্রকাশিত পাঠ্যসূচীর গণিত বিষয়ক আলোচনার ক্ষেত্রে **সেট্** (Set) কথাটির সঙ্গে পরিচিত হওয়ার বিশেষ প্রয়োজন আছে। 'সেট্' বলিতে কি বুঝায় তাহা একটি উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হইল

তোমাদের বিদ্যালয়ের ছাত্রগণ একটি সেট্ ; এবং বিদ্যালয়ের প্রতিটি ছাত্রই ঐ সেট্-এর সদস্য। সেটের সদস্যকে উহার **পদ** (Element) বলা হয়। আবার তোমাদের শ্রেণীও একটি সেট্ গঠন করিয়াছে। তোমাদের শ্রেণীর প্রত্যেক ছাত্রই এই সেট্‌টির পদ। এখন উক্ত সেট্ দুইটির মধ্যে শেষোক্ত সেট্‌টির প্রত্যেক পদই প্রথম সেট্‌টির পদ। এমত অবস্থায় শেষোক্ত সেট্‌টিকে প্রথম সেট্‌টির **সাবসেট্** (Subset) বলা হইবে।

সকল অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যাগুলিকে লইয়া একটি সেট্ গঠন করিলে 1, 2, 3, 4, 5,···প্রভৃতি সংখ্যার প্রত্যেকেই ঐ সেটের পদ হইবে। আবার সকল অখণ্ড ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যাগুলি হইতে যে সেট্ পাওয়া যায় তাহার পদগুলি যথাক্রমে 1, 3, 5,···। স্পষ্টতঃই দ্বিতীয় সেট্‌টি প্রথম সেট্‌টির সাবসেট্।

বিশেষতঃ কোন বিষয়ের আলোচনার সময় যদি ঐ বিষয় সংক্রান্ত নূতন কোন শব্দ (term) ব্যবহার করিতে হয়, তবে জ্ঞাত শব্দের সাহায্যে উহার সংজ্ঞা আরোপ করিয়া লইয়া শব্দটিকে গ্রহণ করা হয়। কিন্তু এই পদ্ধতি সর্বদা কার্যকরী নাও হইতে পারে। কারণ সর্বপ্রথম সংজ্ঞাটির ক্ষেত্রে ঐ নিয়ম প্রযোজ্য নয়। এই জন্যে জ্যামিতিতে ব্যবহৃত শব্দের সংজ্ঞা আরোপ করার পূর্বে জ্যামিতি বিষয়ক কতকগুলি শব্দ সম্পর্কে কল্পিত ধারণাকে স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। প্রকৃতপক্ষে ঘনবস্তু সম্পর্কিত আলোচনায় বিন্দু, সরলরেখা এবং তল সম্বন্ধে যে ধারণা পোষণ করা হইয়াছে তাহার উপর ভিত্তি করিয়াই এক্ষেত্রে জ্যামিতিক শব্দের সংজ্ঞা এবং জ্যামিতি বিষয়ক আলোচনা করা হইবে। বিন্দু, সরলরেখা এবং তলের পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধে বলা যায় যে, সরলরেখা এবং তল উভয়েই বিন্দুর সেট্ (Set of points) এবং সরলরেখা, তলের সাবসেট্। জ্যামিতিতে বিভিন্ন আকারের যে ভিন্ন ভিন্ন চিত্রগুলি লওয়া হয় তাহাদের মধ্যে সাদৃশ্য এই যে উহারা প্রত্যেকেই বিন্দুর দ্বারা গঠিত। অর্থাৎ জ্যামিতিক চিত্রকে (Geometric figure) বিন্দুর সেট্ বলা যাইতে পারে এই পুস্তকে জ্যামিতি-বিষয়ক আলোচনা নিম্নলিখিত স্বীকার্য ও সংজ্ঞাগুলির দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হইয়াছে।

1. **স্বীকার্য :** প্রত্যেক দুইটি বিন্দুর জন্যে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা পাওয়া যাইবে যাহা উভয় বিন্দুকে ধারণ করে, এবং প্রত্যেক সরলরেখা কমপক্ষে দুইটি ভিন্ন বিন্দুকে ধারণ করে।



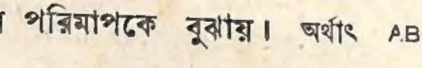
মনেকর, A ও B দুইটি বিন্দু। তাহা হইলে $\overleftrightarrow{AB}$ বা $\overleftrightarrow{BA}$ সরলরেখা বলিতে আমরা উপরের চিত্রটিকে বুঝিয়া থাকি।

2. **স্বীকার্য :** দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সাপেক্ষে কেবলমাত্র একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

স্বীকার্যটি হইতে বলা যায় যে, দুইটি বিন্দুর সাপেক্ষে যে সংখ্যাটি পাওয়া যাইবে তাহাই ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব। মনে কর, A এবং B দুইটি বিন্দু। তবে A ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে AB বলা হইবে। যদি A এবং B একই বিন্দু হয়, তবে $AB=O$ ধরা হইবে। স্বীকার্য অনুসারে $AB=BA$,

A, M, B তিনটি ভিন্ন বিন্দু, যদি একই সরলরেখার বিন্দু হয় এবং যদি $AM+MB=AB$ হয়, তবে M-বিন্দুকে A ও B বিন্দুর **মধ্যবর্তী বিন্দু** বলা হইবে। M বিন্দুকে A এবং B-এর মধ্যবর্তী বিন্দু বুঝাইতে **A-M-B** সংকেত ব্যবহার করা হয়।

রেখাংশ (*Segment*) **:** A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইলে A, B এবং A ও B এর মধ্যবর্তী বিন্দুগুলির সংগ্রহ (*Set*)-কে $\overline{AB}$ বা $\overline{AB}$ রেখাংশ বলা হয়।

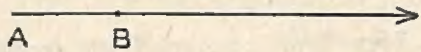


মনে রাখিবে যে $\overline{AB}$ এবং AB সমার্থে ব্যবহৃত হয় না, $\overline{AB}$ একটি জ্যামিতিক চিত্র। অপরপক্ষে AB-এর দ্বারা A এবং B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবত। দূরত্বের পরিমাপকে বুঝায়। অর্থাৎ AB-একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা মাত্র।

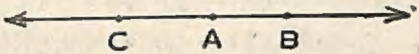
মনেকর, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ দুইটি রেখাংশ। যদি $AB=CD$ হয়, তবে বলা হইবে যে, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ পরস্পর সর্বসম। এই বিবৃতিকে সংক্ষেপে $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ লেখা হয়।

রশ্মি (Ray) : A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু। এখন $\overline{AB}$ এবং সেই সকল বিন্দু C যাহারা $(AB+BC)=AC$ শর্তটিকে সিদ্ধ করে তাহাদের সমন্বয়ে উৎপন্ন জ্যামিতিক

চিত্রটিকে A প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট B বিন্দুগামী রশ্মি বলা হয়। এবং ইহাকে $\overrightarrow{AB}$ এই



সাঙ্কেতিক চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয়। A, B, C তিনটি ভিন্ন বিন্দু। যদি C – A – B



হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-কে বিপরীত রশ্মি বলা হয়। বিপরীত রশ্মির চিত্র হইতে ইহা বলা যায় যে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর সমন্বয়ে একটি সরলরেখা গঠিত হইয়াছে।

সরলরেখা, রশ্মি ও রেখাংশের পারস্পরিক সম্বন্ধ ঃ (i) $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$-এর একটি অংশ এবং (ii) $\overrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$-এর একটি অংশ।

মনেকর, P একটি বিন্দু। এখন P বিন্দুটি $\overrightarrow{AB}$-এর উপর অবস্থিত অথবা $\overrightarrow{AB}$, P বিন্দুগামী একথা তখনই বলা হইবে যদি $\overline{AP}$ রেখাংশ, $\overrightarrow{AB}$-এর অংশ হয়। আবার বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$-এর সমন্বয়ে $\overleftrightarrow{AB}$ গঠিত হয়। এখন P বিন্দুটি যদি $\overrightarrow{AB}$-এর উপর অথবা $\overrightarrow{BA}$-এর উপর অবস্থিত হয় তখন P বিন্দুকে $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর অবস্থিত অথবা $\overleftrightarrow{AB}$, P বিন্দুগামী একথা বলা হইবে।

অতএব $\overleftrightarrow{AB}$, P (A ও B হইতে ভিন্ন) বিন্দুগামী হইবে যদি A – P – B বা A – B – P বা P – A – B হয়; বিপরীতক্রমে A – P – B বা A – B – P বা P – A – B-এর যে-কোন একটি সত্য হইলে $\overleftrightarrow{AB}$, P বিন্দুগামী হইবে। যদি $\overrightarrow{AB}$, P এবং Q বিন্দুগামী হয় তবে বলা হইবে যে $\overline{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ (বা $\overleftrightarrow{AB}$)-এর উপর অবস্থিত।

৪, **স্বীকার্য ঃ** ধর x একটি বাস্তব রাশি। তাহা হইলে $\overrightarrow{AB}$-এর উপর এরূপ একটিমাত্র বিন্দু P সর্বদাই অবস্থান করিবে যাহাতে $\overline{AP}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য x হইবে ॥

মনে কর, $\overrightarrow{AB}$ একটি রশ্মি এবং $\overline{PQ}$ একটি রেখাংশ। অতএব PQ একটি বাস্তব রাশি। অতএব $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির উপর এরূপ একটি বিন্দু C পাওয়া যাইবে যাহাতে AC=PQ হয়। অতএব দেখা যাইতেছে যে, $\overrightarrow{AB}$ হইতে এরূপ একটি রেখাংশ $\overline{AC}$ নির্ণয় করা সম্ভব যাহাতে $\overline{AC} \cong \overline{PQ}$ হয়। এক্ষেত্রে বলা হইবে যে, $\overline{PQ}$ রেখাংশের সর্বসম করিয়া $\overrightarrow{AB}$ (বা $\overleftrightarrow{AB}$) হইতে $\overline{AC}$ রেখাংশকে ছেদ করা হইল বা কাটিয়া লওয়া হইল।

রেখাংশের মধ্যবিন্দু : মনে কর, N বিন্দু A ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী এরূপ একটি বিন্দু যে AN=NB ; তবে N-বিন্দুটিকে রেখাংশ $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু বলা হইবে।

'প্রত্যেক রেখাংশের কেবলমাত্র একটি মধ্যবিন্দু আছে' —ধর, $\overline{AB}$ একটি রেখাংশ। অতএব AB=x। এখানে x একটি বাস্তব রাশি। অতএব $\frac{x}{2}$ একটি বাস্তব রাশি। অতএব, $\overline{AB}$-এর উপর এরূপ একটিমাত্র বিন্দু P পাওয়া যাইবে যাহাতে AP=$\frac{x}{2}$ হয়। অতএব $\overline{AB}$-এর একটি মাত্র মধ্যবিন্দু আছে।

উপরের সিদ্ধান্তটি হইতে অতি সহজে প্রমাণ করা যায় যে, $\overline{AB}$-এর উপর অসংখ্য বিন্দু অবস্থান করে।

সমরেখ (Collinear) **:** একই সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলিকে সমরেখ বলে। যদি C বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপরিস্থিত বিন্দু না হয়, তবে A, B, C বিন্দু তিনটিকে সমরেখ নয় বলা হইবে।

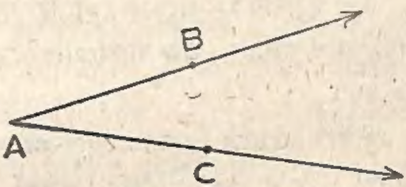
4. **স্বীকার্য :** (i) প্রত্যেক তলে কমপক্ষে এরূপ তিনটি বিন্দু পাওয়া যাইবে যাহারা সমরেখ নয়। (ii) যদি কোন তলে একটি সরলরেখা থাকে, তবে ঐ তলের যে সকল বিন্দু ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় তাহারা এরূপ দুইটি বিন্দু-সংগ্রহ গঠন করিবে যে উহার একটি সংগ্রহের যে-কোন বিন্দু P এবং অপর সংগ্রহটির যে-কোন বিন্দু Q হইলে $\overline{PQ}$ রেখাংশ উক্ত সরলরেখাটিকে ছেদ করিবে।

কোন সরলরেখা কোন তলে অবস্থিত হইলে উপরিউক্ত যে-দুইটি বিন্দুসংগ্রহ পাওয়া যাইবে তাহারা প্রত্যেকেই একটি **অর্ধতল** (Half Plane) গঠন করে। সরল-রেখাটিকে ঐ অর্ধতল দুইটির প্রান্ত বলে। যদি M এবং N বিন্দুদ্বয় উহার

যে-কোন একটি অর্ধতলে অবস্থিত হয়, তবে M এবং N বিন্দুকে **সরলরেখাটির একই পার্শ্বস্থ বিন্দু** বলা হইবে। কিন্তু M বিন্দু ঐ অর্ধতল দুইটির যে-কোন একটি অর্ধতলে এবং N বিন্দু অপর অর্ধতলে অবস্থিত হইলে বলা হইবে যে M এবং N বিন্দু দুইটি **সরলরেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।**

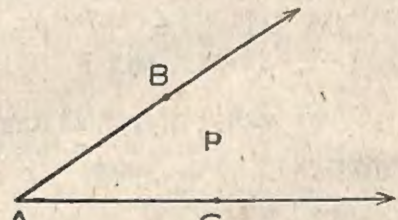
কোণ (Angle) : একই প্রান্তবিন্দু যুক্ত দুইটি রশ্মি যে-চিত্র গঠন করে তাহাকে কোণ (Angle) বলে। যদি রশ্মি দুইটি বিপরীত রশ্মি হয়, তবে কোণটিকে **সরল কোণ** (Straight angle) বলা হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের **বাহু** (Sides) এবং উহাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুকে কোণের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

পার্শ্বের চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ রশ্মিদ্বয় $\angle BAC$ বা, $\angle CAB$ গঠন করিয়াছে। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ উক্ত কোণের বাহু এবং A-বিন্দু কোণটির শীর্ষবিন্দু।



কোণ-বিষয়ক আলোচনার ক্ষেত্রে কেবলমাত্র 'কোণ' বলিতে আমরা সরল কোণ নয় এরূপ কোণকে বুঝিব। প্রত্যেক কোণই উহার ধারক তলটিকে তিনটি বিন্দুসংগ্রহে (Sets of Points) বিভক্ত করে। এই বিন্দুসংগ্রহ তিনটির মধ্যে কোণ নিজেই একটি বিন্দুসংগ্রহ গঠন করে। ইহা ছাড়া কোণের অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থ বিন্দুগুলি যথাক্রমে দুইটি বিন্দুসংগ্রহ গঠন করে। এখন প্রশ্ন হইল যে, কোণের অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থ বিন্দু বলিতে আমরা কি বুঝি

মনে কর, $\angle BAC$-এর ধারক তলে P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহা $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর উপর অবস্থিত নয়।



এখন P বিন্দুকে $\angle BAC$-এর অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হইবে যদি (i) P এবং B বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{A}$ সরলরেখার একই পার্শ্বে, এবং (ii) P ও B বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{AC}$ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়। ইহা ভিন্ন অন্যান্য যে সকল বিন্দু $\angle BAC$-এর উপরিস্থিত নয় কিংবা $\angle BAC$-এর অন্তঃস্থ বিন্দু নয় তাহাদের $\angle BAC$-এর বহিঃস্থ বিন্দু বলে।

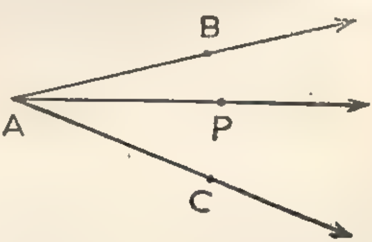
মনে রাখিবে যে, কোণের বাহুদ্বয়ের কোনটিই রেখাংশ নয়, উহারা প্রত্যেকেই রশ্মি। উপরে কোণের যে-সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে তাহাতে $\angle BAC$ এবং $\angle CAB$-মধ্যে কোন পার্থক্য নির্দেশ করা হয় নাই। কিন্তু ত্রিকোণমিতির ক্ষেত্রে $\angle BAC$ এবং $\angle CAB$ একই কোণ নহে। যদি $\angle BAC$ এবং $\angle CAB$-এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AB}$-কে প্রারম্ভিক বাহু (Initial Side) ধরা হয়, তবে উক্ত কোণদ্বয় ভিন্ন কোণ হইবে। ত্রিকোণমিতির প্রথম অধ্যায়ে এ-বিষয়ে বিশেষ আলোচনা করা হইবে।

কোণের পরিমাপ :

5. **স্বীকার্য :** প্রত্যেক কোণের পরিপ্রেক্ষিতে 0 হইতে 180-এর মধ্যে একটি বাস্তব রাশি আছে। উক্ত বাস্তব রাশিটিকে কোণটির ডিগ্রী এককের পরিমাপ বলিয়া ধরা হয়।

স্বীকার্য অনুসারে, $\angle BAC$ কোণ-এর সাপেক্ষে একটি বাস্তব রাশি পাওয়া যাইবে। ইহাকে $\angle BAC$ এর পরিমাপ বলিয়া ধরা হয়। যদি $\angle BAC$-এর পরিমাপ x হয় তবে বক্তব্যটিকে $\angle BAC$-এর পরিমাপ $= x^\circ$ বা $m\angle BAC = x^\circ$ লেখা হইবে। এক্ষেত্রে $\angle BAC$-কে x° (x ডিগ্রী) কোণও বলা হয়।

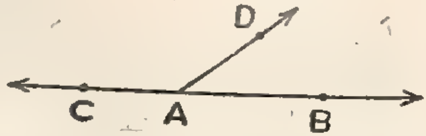
6. **স্বীকার্য :** যদি P বিন্দু $\angle BAC$-এর অন্তঃস্থ বিন্দু হয় তবে $\angle BAC$-এর পরিমাপ $= \angle BAP$-এর পরিমাপ $+$ $\angle PAC$-এর পরিমাপ।



স্বীকার্যটি হইতে বলা যায় যে, $\angle CAP$-এর পরিমাপ $= \angle CAB$-এর পরিমাপ $-$ $\angle PAB$-এর পরিমাপ।

(i) যদি দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি 180° হয় তবে ঐ কোণ দুইটিকে **সম্পূরক কোণ** (Supplementary angle) বলে।

(ii) যদি $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ দুইটি বিপরীত রশ্মি এবং $\overrightarrow{AD}$ অপর একটি রশ্মি হয়, তবে বলা হইবে যে $\angle BAD$ এবং $\angle DAC$ **রৈখিক যুগল** (Linear pair) গঠন করিয়াছে।



7. **স্বীকার্য:** যদি দুইটি কোণ রৈখিক যুগল গঠন করে, তবে উহারা সম্পূরক কোণ হইবে।

(iii) দুইটি কোণের পরিমাপ একই হইলে উহাদের **সর্বসম কোণ** (Congruent angle) বলে।

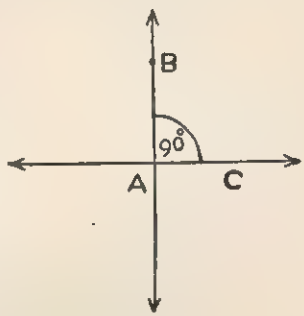
মনে কর, $\angle ABC$-এর পরিমাপ $=$ $\angle DEF$-এর পরিমাপ ;

অতএব $\angle ABC$ এবং $\angle DEF$ পরস্পর সর্বসম। অর্থাৎ

$$\angle ABC \cong \angle DEF.$$

(iv) যদি রৈখিক যুগলের কোণদ্বয় সর্বসম হয়, তবে উহাদের প্রত্যেকটিকে **সমকোণ** (Right angle) বলে। রৈখিক যুগলের চিত্রে যদি $\angle BAD \cong \angle DAC$ হয়, তবে উপরের স্বীকার্যটি হইতে বলা যায় যে সমকোণের পরিমাপ $90°$ হইবে।

যে-কোণের পরিমাপ $90°$ অপেক্ষা কম তাহাকে **সূক্ষ্মকোণ** (Acute angle) বলে। কোন কোণের পরিমাপ $90°$ অপেক্ষা বেশি হইলে কোণটিকে **স্থূলকোণ** (Obtuse angle) বলে।



যদি দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি $90°$ হয় তবে ঐ কোণ দুইটিকে **পূরককোণ** (Complementary angle) বলে। যদি দুইটি রশ্মির সমন্বয়ে উৎপন্ন কোণটি সমকোণ হয়, তবে রশ্মিদ্বয়ের একটিকে অপরটির উপর **লম্ব** (Prependicular) বলা হয়।

যদি $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ লম্ব হয়, তবে উহাদের সংক্ষেপে $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ লেখা হয়।

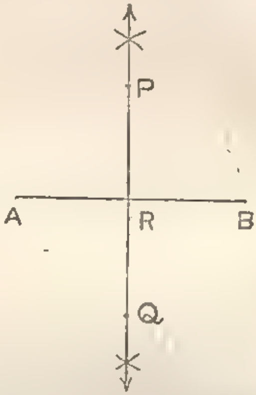
যদি $\angle BAC$ সমকোণ হয় তবে $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ বা, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$ বা, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

বা, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ বা, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ বা, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ বা, $\overline{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

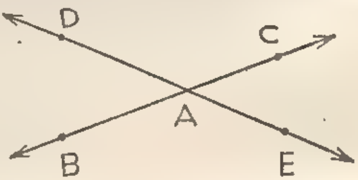
বা, $\overrightarrow{AB} \perp \overline{AC}$ বা, $\overrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ বা, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ বা, $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$

বা, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AC}$-এর যে কোনটিকে লেখা যাইতে পারে।

কোন রেখাংশের মধ্যবিন্দুগামী সরলরেখা যদি ঐ বিন্দুতে রেখাংশটির উপর লম্ব হয় তবে সরলরেখাটিকে রেখাংশটির **লম্ব সমদ্বিখণ্ডক** বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে $\overline{AB}$ রেখাংশের মধ্যবিন্দু R এবং $\overleftrightarrow{PQ}$, R বিন্দুতে $\overline{AB}$-এর উপরলম্ব। অর্থাৎ ∠PRB-এর পরিমাপ $=90^\circ$. অতএব $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{AB}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।



(v) দুইটি কোণকে **বিপ্রতীপ কোণ** বলা হইবে যদি উহাদের বাহুগুলি বিপরীত রশ্মির দুইটি যুগল গঠন করে। পার্শ্বের চিত্রে ∠DAB এবং ∠CAE বিপ্রতীপ কোণ। এখানে $\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AE}$ এর সমন্বয়ে $\overleftrightarrow{DE}$ সরলরেখা এবং $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AB}$-এর সমন্বয়ে $\overleftrightarrow{BC}$ সরলরেখা গঠিত হইয়াছে। A বিন্দু উক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। অতএব বলা যায় যে, দুইটি ভিন্ন রেখা উহাদের ছেদবিন্দুতে বিপ্রতীপ কোণ গঠন করে।



8. **স্বীকার্য ঃ** রশ্মি $\overrightarrow{AB}$ একটি অর্ধতলের প্রান্তরেখার উপর অবস্থিত হইলে 0 হইতে 180 এর মধ্যবর্তী প্রত্যেক সংখ্যা x-এর সাপেক্ষে কেবলমাত্র একটি করিয়া রশ্মি $\overrightarrow{AP}$ পাওয়া যাইবে যাহাতে ∠PAB-এর পরিমাপ x হইবে।

মনে কর, ∠DEF একটি নির্দিষ্ট কোণ যাহার পরিমাপ x $(0<x<180)$। এখন $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির A বিন্দুতে ∠DEF-এর সর্বসম করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে। উপরের স্বীকার্য অনুসারে $\overrightarrow{AB}$ রশ্মি যে অর্ধতলের প্রান্তরেখায় অবস্থিত সেই অর্ধতলে এরূপ একটি $\overrightarrow{AP}$ অবশ্যই পাওয়া যাইবে যাহার ক্ষেত্রে ∠PAB-এর পরিমাপ x হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে $\angle DEF$-এর পরিমাপ $=$ $\angle PAB$-এর পরিমাপ $= x$

$\therefore$ $\angle DEF \cong \angle PAB$.

কোণের সমদ্বিখণ্ডক : যদি D বিন্দু $\angle BAC$-এর অন্তঃস্থ বিন্দু এবং $\angle BAD \cong \angle DAC$ হয়, তবে $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং $\overrightarrow{AD}$-কে $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক বলা হয়। সহজেই দেখান যায় যে, প্রত্যেক কোণের কেবলমাত্র একটি সমদ্বিখণ্ডক আছে।

ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় আলোচনার পূর্বে রেখাংশ এবং কোণের সর্বসম বিষয়ক কয়েকটি কথা জানা প্রয়োজন।

যেমন (i) মনে কর, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান। তাহা হইলে $\overline{AB} \cong \overline{CD}$-এর দ্বারা আমরা $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটিকে সর্বসম বুঝিয়া থাকি। অর্থাৎ এক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্র দুইটিকে পরস্পর সর্বসম বুঝাইতে '$\cong$' চিহ্ন ব্যবহার করা হইয়াছে। কিন্তু $\overline{AB}$ এবং $\overline{BA}$-এর দ্বারা একই জ্যামিতিক চিত্রকে বুঝায়। এইজন্যে $\overline{AB} \cong \overline{BA}$-এর পরিবর্তে, $\overline{AB} = \overline{BA}$ লেখা যাইতে পারে। কিন্তু $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ একই রেখাংশ না হইলে $\overline{AB} = \overline{CD}$ কথাটি অর্থহীন হইবে।

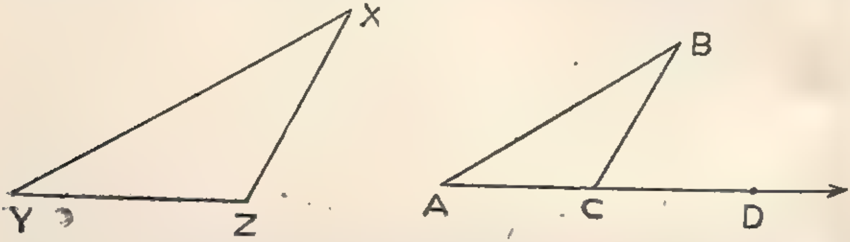
(ii) আবার $\angle BAC$ এবং $\angle DEF$-এর পরিমাপ সমান হইলে কোণ দুইটিকে সর্বসম কোণ বলা হয়। এখন $\angle BAC$ এবং $\angle CAB$-এর পরিমাপ সমান এবং উহারা একই কোণকে সূচিত করে। এরূপ কোণের ক্ষেত্রে $\angle BAC \cong \angle CAB$-এর পরিবর্তে $\angle BAC = \angle CAB$ লেখা যাইতে পারে। কিন্তু $\angle BAC$ এবং $\angle DEF$ একই কোণ না হইলে $\angle BAC = \angle DEF$ কথাটি অর্থহীন হইবে।

ত্রিভুজ (Triangle) **:** যদি X, Y ও Z বিন্দু তিনটি সমরেখ না হয় তবে $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ এবং $\overline{ZX}$ রেখাংশের সমন্বয়কে (union of the segments) ত্রিভুজ বলে। প্রত্যেকটি রেখাংশকে উহার বাহু এবং X, Y ও Z-কে উহার শীর্ষবিন্দু বলা হয়। $\triangle XYZ$-এর প্রত্যেক রেখাংশ যুগল উহার প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দুতে একটি করিয়া কোণ গঠন করে। এক্ষেত্রে ত্রিভুজটির কোণগুলি যথাক্রমে $\angle X$, $\angle Y$ ও $\angle Z$। এই কোণগুলিকে ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। এখন $\angle BCD$-কে উক্ত ত্রিভুজটির বহিঃস্থ কোণ বলা হইবে যদি C বিন্দু A এবং D বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী বিন্দু হয়।

প্রত্যেক কোণের ন্যায় ত্রিভুজও উহার ধারক তলকে তিনটি বিন্দুসংগ্রহে বিভক্ত করে। উহারা যথাক্রমে ত্রিভুজ, ত্রিভুজের অন্তঃস্থ তল এবং ত্রিভুজের বহিঃস্থ তল।

বাহুগুলির উপরিস্থিত বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত বিন্দুসংগ্রহটি ত্রিভুজটিকে সূচিত করে। কোন বিন্দু ত্রিভুজটির প্রত্যেকটি কোণের অন্তঃস্থ বিন্দু হইলে উহাকে ত্রিভুজের অন্তঃস্থ



বিন্দু বলা হয়। ত্রিভুজটির অন্তঃস্থ সকল বিন্দুগুলিকে লইয়া যে বিন্দুসংগ্রহটি গঠিত হয় তাহাকে ত্রিভুজটির অন্তঃস্থ তল বলে। ত্রিভুজের বহিঃস্থ তল বলিতে ত্রিভুজটির ধারক তলের এমন সকল বিন্দুগুলির সংগ্রহকে বুঝাইবে যাহারা ত্রিভুজ এবং ত্রিভুজের অন্তঃস্থ তলের উপর অবস্থিত নয়।

বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene Triangle) **:** ত্রিভুজের কোন দুই বাহুই সর্বসম না হইলে উহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Isosceles Triangle) **:** কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু সর্বসম হইলে উহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral Triangle) **:** ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর সর্বসম হইলে উহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

$\triangle ABC$-এর $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুকে যথাক্রমে শীর্ষবিন্দু A, B এবং C-এর বিপরীত বাহু বলে।

মধ্যমা : ত্রিভুজের কোন শীর্ষবিন্দু হইতে উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে ত্রিভুজের মধ্যমা বলে।

$\triangle ABC$-এর $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D ; $\overline{AD}$ অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে $\overline{AD}$, $\triangle ABC$-এর একটি মধ্যমা। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে।

দুইটি ত্রিভুজের একটির তিনটি বাহু যথাক্রমে অপরটির তিনটি বাহুর সহিত সর্বসম হইলে এবং একটির তিনটি কোণ যথাক্রমে অপরটির তিনটি কোণের সহিত সর্বসম হইলে ত্রিভুজ **দুইটিকে সর্বসম** বলা হইবে। ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলিকে স্বীকার্য হিসাবে গ্রহণ করা হইয়াছে।

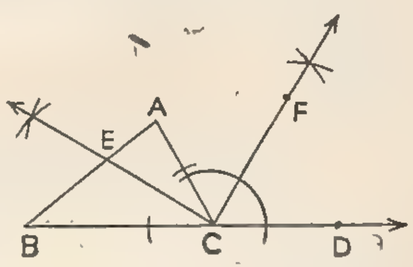
9. **স্বীকার্য :** (i) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ

যথাক্রমে অপরটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। [বাহু—কোণ—বাহু—স্বীকার্য।]

অনুরূপ বাহু : দুইটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সহিত সর্বসম হইলে উক্ত কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়কে অনুরূপ বাহু বলা হয়।

(ii) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি কোণ এবং একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। [কোণ—বাহু—কোণ—স্বীকার্য।]

ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখণ্ডক : $\triangle ABC$-এর অন্তঃস্থ $\angle ACB$ এবং বহিঃস্থ $\angle ACD$; যদি $\overrightarrow{CE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ এরূপ দুইটি রশ্মি হয় যে $\angle BCE \cong \angle ACE$ এবং $\angle ACF \cong \angle DCF$ তাহা হইলে $\overrightarrow{CE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$-কে যথাক্রমে $\triangle ABC$-এর ACB কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বলা হইবে। যেহেতু BCD কোণটি সরলকোণ অতএব



$\angle ECF$-এর পরিমাপ 90° হইবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{CF}$.

সমান্তরাল সরলরেখা : একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা যদি পরস্পরকে ছেদ না করে অর্থাৎ তাহাদের যদি কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে তবে উহাদের সমান্তরাল সরলরেখা বলে। দুইটি রেখাংশ যদি যথাক্রমে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় তবে রেখাংশ দুইটিকে সমান্তরাল রেখাংশ বলা হইবে।

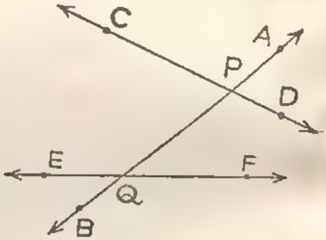
যদি $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হয় তবে উক্ত বিবৃতিকে সংক্ষেপে $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ লেখা

হইবে। এখন $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ হইলে $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$, $\overline{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$, প্রভৃতি সম্বন্ধের যে-কোনটিকে লেখা যাইতে পারে।

10. স্বীকার্য: কোন সমতলে দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা তৃতীয় কোন সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

উপরের স্বীকার্যটি হইতে সিদ্ধান্ত করা যায় যে, একই সমতলে কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া উক্ত সরলরেখার সহিত সমান্তরাল করিয়া কেবলমাত্র একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়।

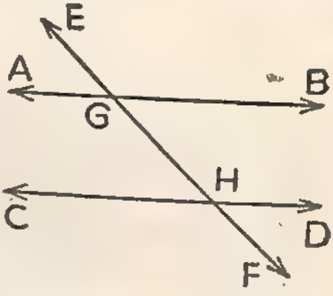
অনুরূপ কোণ এবং একান্তর কোণ: মনে কর $\overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এক্ষেত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ বা $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখাকে $\overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক বলা হইবে।



যদি $\overleftrightarrow{CD}$-এর D বিন্দু এবং $\overrightarrow{EF}$-এর F-বিন্দু যথাক্রমে $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকটির একই পার্শ্বে অবস্থিত হয় তবে $\angle APD$ এবং $\angle PQF$-কে অনুরূপ কোণ বলে। আবার যদি $\overleftrightarrow{CD}$-এর C-বিন্দু এবং $\overleftrightarrow{EF}$-এর F বিন্দু যথাক্রমে $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয় তবে $\angle APC$ এবং $\angle PQF$-কে একান্তর কোণ বলা হয়।

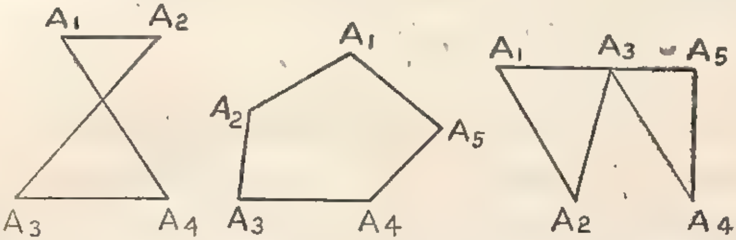
11. স্বীকার্য: একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম হয়, তবে শেষোক্ত সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

মনেকর, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{EF}$ উহাদের ছেদক। এক্ষেত্রে $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$-কে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়া যে দুইটি একান্তর যুগল গঠন করিয়া তাহারা যথাক্রমে $\{\angle AGH, \angle GHD\}$ এবং $\{\angle BGH, \angle GHC\}$; উপরের স্বীকার্যটি হইতে সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, $\angle AGH \cong \angle GHD$ এবং $\angle BGH \cong \angle GHC$.



অসমতা ঃ যদি AB<CD হয়, তবে বলা হইবে যে $\overline{AB}<\overline{CD}$। আবার $\angle A$ এর পরিমাপ $<\angle B$-এর পরিমাপ হইলে $\angle A<\angle B$ বলা হইবে।

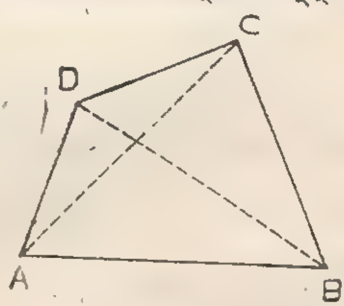
বহুভুজ (Polygon) ঃ যদি কোন সমতলে $A_1, A_2, \cdots A_n$ $(n \geqslant 3)$ বিন্দুগুলি



এরূপে অবস্থিত হয় যে উহাদের পর পর যে-কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়, তবে $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ এবং $\overline{A\ A_1}$ রেখাংশগুলির সমন্বয়কে বহুভুজ বলে।

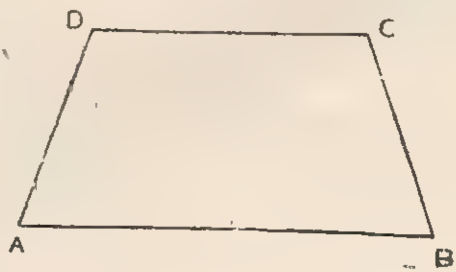
উপরের চিত্র তিনটির মধ্যে চিত্র (b)-এ প্রদর্শিত বহুভুজটির (i) যে-কোন দুইটি বাহু উহাদের প্রান্তবিন্দু ভিন্ন মধ্যবর্তী অপর কোন বিন্দুতে ছেদ করে নাই এবং (ii) উহার কোন শীর্ষবিন্দুই উহার কোন বাহুর মধ্যবর্তী বিন্দু নয়। এরূপ বহুভুজকে সরল বহুভুজ (Simple polygon) বলে। পরবর্তী ক্ষেত্রে বহুভুজ বলিতে আমরা সরল বহুভুজকেই বুঝিব।

চতুর্ভুজ (Quadrilateral) ঃ চারিটি বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে চতুর্ভুজ বলে। চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি শীর্ষবিন্দুকে যুক্ত করিয়া প্রাপ্তরেখাংশটি যদি চতুর্ভুজটির বাহু না হয়, তবে উহাকে কর্ণ বলে। পার্শ্বের চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$।



ট্রাপিজিয়াম (Trapezium) ঃ কোন চতুর্ভুজের একটি বাহু-যুগল সমান্তরাল হইলে উহাকে ট্রাপিজিয়াম বলে।

পর্শ্বের চিত্রে ABCD ট্রাপিজিয়ামটির $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

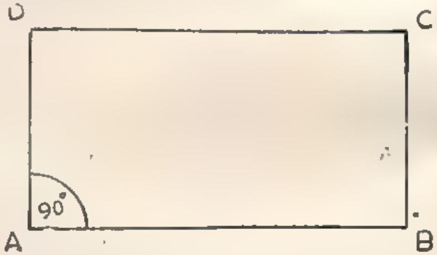


সামান্তরিক (Parallelogram) : চতুর্ভুজের দুইটি বাহুযুগল সমান্তরাল হইলে উহাকে সামান্তরিক বলে।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD সামান্তরিকটির $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ এবং $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

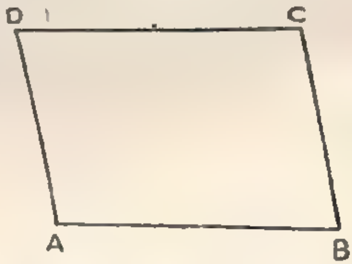
আয়তক্ষেত্র (Rectangle) : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে আয়তক্ষেত্র বলে।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার $\angle A$-এর পরিমাপ $=90^\circ$



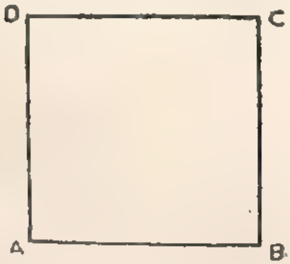
রম্বস (Rhombus) : যে সামান্তরিকের বাহুগুলি সর্বসম তাহাকে রম্বস বলে।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটিরম্বস। উহার $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.



বর্গক্ষেত্র (Square) : রম্বসের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাকে বর্গক্ষেত্র বলে।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ইহার $\angle A$ সমকোণ।



দশম শ্রেণী

সাঙ্কেতিক চিহ্ন :

এই পুস্তকে যে সকল সাঙ্কেতিক চিহ্ন ব্যবহার করা হইয়াছে তাহাদের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল।

চিহ্ন	অর্থ	সংজ্ঞার পৃষ্ঠা
$=$	সমান	—
$\neq$	অসমান	—
$\therefore$	অতএব	—
$\because$	যেহেতু	—
$<$	ক্ষুদ্রতর	—
$\leqslant$	ক্ষুদ্রতর এবং সমান	—
$>$	বৃহত্তর	—
$\geqslant$	বৃহত্তর এবং সমান	—
$\overleftrightarrow{AB}$	A এবং B বিন্দুকে ধারণ করে এরূপ সরলরেখা	(ii)
A-M-B	M বিন্দু, A এবং B বিন্দুর মধ্যবর্তী বিন্দু	(ii)
$\overline{AB}$	A এবং B প্রান্তবিন্দু যুক্ত রেখাংশ	(ii)
AB	A এবং B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব	(ii)
$\overrightarrow{AB}$	A এবং B বিন্দুগামী রশ্মি যাহার প্রান্ত বিন্দু A	(iii)
$\angle BAC$	$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ বাহুবিশিষ্ট কোণ	(v)
$m\angle BAC$	$\angle BAC$-এর পরিমাপ	(vi)
$\triangle XYZ$	X, Y এবং Z শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজ	(ix)
$\cong$	সর্বসম	(ix)
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	$\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটি পরস্পর সর্বসম	(ii)
$\angle ABC \cong \angle DEF$	$\angle ABC$ এবং $\angle DEF$ পরস্পর সর্বসম	(vii)
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$-এর উপর লম্ব	(vii)
$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$	$\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{RS}$ পরস্পর সমান্তরাল	(ix)
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	$\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ পরস্পর সর্বসম	(x)
ক্ষেঃ $\triangle ABC$	$\triangle ABC$-এর ক্ষেত্রফল	
$\overset{\frown}{AC}$	AC চাপ	(31)

প্রথম অধ্যায়

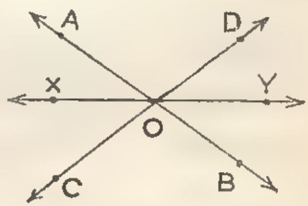
পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

এই অধ্যায়ে পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে যে সকল উপপাদ্য এবং সম্পাদ্যগুলিকে আলোচনা করা হইয়াছে সেইগুলিকে উল্লেখ করিয়া উহাদের সাহায্যে কয়েকটি জ্যামিতিক সিদ্ধান্ত প্রমাণ করা হইবে।

উপপাদ্য : দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

উদা. $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে প্রমাণ কর যে, AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডককে বর্ধিত করিলে উহা BOD কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

স্বীকার : $\overrightarrow{OX}$, AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক। $\overrightarrow{OX}$-এর বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{OY}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রামাণ্য বিষয় : $\overrightarrow{OY}$, BOD কোণের সমদ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ $\angle BOY \cong \angle YOD$

প্রমাণ : এখানে $\angle XOC \cong$ বিপ্রতীপ $\angle YOD$ এবং $\angle AOX \cong$ বিপ্রতীপ $\angle BOY$.

কিন্তু $\angle XOC \cong \angle AOX$ (স্বীকার).

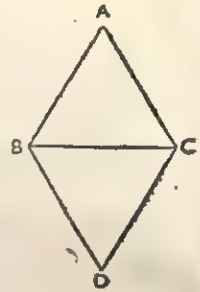
$\therefore \quad \angle YOD \cong \angle BOY \quad \therefore \quad \overrightarrow{OY}$, $\angle BOD$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য : একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি (i) দুইটি একান্তর কোণ সর্বসম হয়, অথবা (ii) ছেদক সরলরেখাটির একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে শেষোক্ত সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

উদা. প্রমাণ কর যে, একই ভূমির উপর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক গঠন করিবে।

স্বীকার ঃ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DBC$ সমবাহু ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি $\overline{BC}$-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ ABDC একটি সামান্তরিক ;



প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DBC$ প্রত্যেকে সমবাহু বলিয়া উহাদের প্রত্যেকটি কোণ পরস্পর সর্বসম হইবে।

$\therefore$ $\angle ACB \cong \angle DBC$; কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ। $\therefore$ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

আবার $\angle CBA \cong \angle BCD$; ইহারাও পরস্পর একান্তর কোণ। $\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য ঃ যদি একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে

(i) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে,

(ii) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে এবং

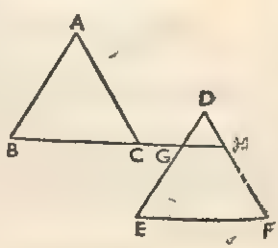
(iii) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

উদা. যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান্তরাল হয় তবে উহাদের অনুরূপ কোণগুলি সর্বসম হইবে।

স্বীকার ঃ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর মধ্যে $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ এবং $\overline{CA} \parallel \overline{FD}$.

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ এবং $\angle C \cong \angle F$

অঙ্কন ঃ $\overline{BC}$ বাহুকে বর্ধিত করাতে উহা $\overline{DE}$ এবং $\overline{FD}$-কে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিল।



প্রমাণ ঃ $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ এবং $\overline{BH}$ উহাদের যথাক্রমে B এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ $\angle B \cong$ অনুরূপ $\angle DGH$

আবার, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ $\therefore$ $\overline{BH} \parallel \overline{EF}$ এবং $\overline{ED}$ উহাদের ছেদক।

$\therefore$ $\angle E \cong$ অনুরূপ $\angle DGH$

$\therefore$ $\angle B \cong \angle E.$

আবার, $\overline{CA} \parallel \overline{FD}$ এবং $\overline{BH}$ ছেদক। $\therefore$ $\angle DHB \cong$ অনুরূপ $\angle C.$

কিন্তু $\overline{BH} \parallel \overline{EF}$ এবং $\overline{FD}$ ছেদক। $\therefore$ $\angle F \cong$ অনুরূপ $\angle DHB.$

$\therefore$ $\angle C \cong \angle F.$

$\therefore$ $\triangle ABC$-এর অবশিষ্ট কোণ $\cong \triangle DEF$-এর অবশিষ্ট কোণ।

$\therefore$ $\angle A \cong \angle D.$

উপপাদ্য ঃ ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

উদা. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D ; যদি $\overline{ED}$ এবং $\overline{AD}$ রেখাংশদ্বয় সর্বসম হয়, তবে দেখাও যে BAC কোণটি সমকোণ হইবে।

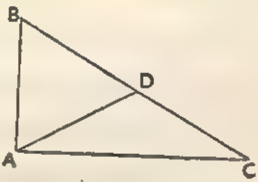
স্বীকার ঃ ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D ; অর্থাৎ $\overline{BD} \cong \overline{DC}.$ আবার $\overline{BD} \cong \overline{AD}$; অতএব $\overline{BD} \cong \overline{DC} \cong \overline{AD}.$

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\angle BAC$ সমকোণ।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\overline{BD} \cong \overline{AD}$; অতএব $\angle ABD \cong \angle DAB$

আবার $\overline{DC} \cong \overline{AD}$;

অতএব $\angle ACD \cong \angle CAD$



$\therefore$ $\angle ABD$-এর পরিমাপ $+ \angle ACD$-এর পরিমাপ

$= \angle DAB$-এর পরিমাপ $+ \angle CAD$-এর পরিমাপ।

$= \angle BAC$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\angle ABD$-এর পরিমাপ $+ \angle ACD$-এর পরিমাপ $+$

$\angle BAC$-এর পরিমাপ $= 2(\angle BAC$-এর পরিমাপ$)$।

$\therefore$ $2(\angle BAC$-এর পরিমাপ$) = 180^\circ$

$\therefore$ $\angle BAC$-এর পরিমাপ $= 90^\circ$; $\therefore$ $\angle BAC$-সমকোণ।

উপপাদ্য ঃ ত্রিভুজের কোন বাহুকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণের পরিমাপ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির পরিমাপের সমষ্টির সমান।

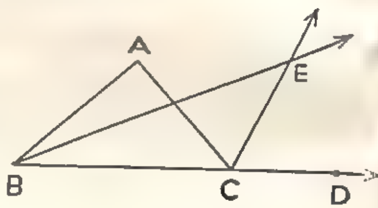
উদা. কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের একটির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং অপরটির বহিঃসমদ্বিখণ্ডক পরস্পর মিলিত হইয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা শিরঃকোণের অর্ধেক।

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর ABC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{BE}$ এবং ACB কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{CE}$ পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হইয়া $\angle BEC$ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle BEC$-এর পরিমাপ$=\frac{1}{2}\angle BAC$-এর পরিমাপ।

অঙ্কন : $\overrightarrow{BD}$ অঙ্কন করা হইল ; যাহাতে $B-C-D$ হয়।

প্রমাণ : $\overrightarrow{CE}$, $\angle ACB$-এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বলিয়া, $\angle DCE \cong \angle ECA$ আবার $\angle ABE \cong \angle EBC$ (স্বীকার)।



এখন, $\angle BEC$-এর পরিমাপ

$= \angle DCE$-এর পরিমাপ $- \angle EBC$-এর পরিমাপ।

$=\frac{1}{2}[\angle DCA$-এর পরিমাপ $- \angle ABC$-এর পরিমাপ $]$

$=\frac{1}{2}\angle BAC$-এর পরিমাপ।

উপপাদ্য : n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $2(n-2)$ সমকোণ।

উদা. একটি সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের পরিমাপ $\frac{9}{5}$ সমকোণ হইলে বহুভুজটির বাহুসংখ্যা কত হইবে ?

উঃ। মনে কর, সুষম বহুভুজটির বাহুসংখ্যা$=n$

$\therefore$ উহার অন্তঃকোণগুলির পরিমাপের সমষ্টি$=2(n-2)$ সমকোণ।

যেহেতু সুষম বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সর্বসম, অতএব উহার প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ$=\frac{2(n-2)}{n}$ সমকোণ।

$\therefore$ শর্তানুসারে, $\frac{2(n-2)}{n}=\frac{9}{5}$ বা, $10n-20=9n$ $\therefore$ $n=20$

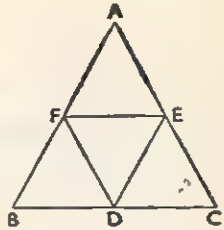
$\therefore$ সুষম বহুভুজটির বাহুসংখ্যা$=20$

উপপাদ্য : কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু সর্বসম হইলে ঐ বাহু দুইটির বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সর্বসম হইবে।

উদা. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্য বিন্দুগুলি যোগ করিলে যে ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাহা সমদ্বিবাহু হইবে।

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{CA}$ এবং D,E,F যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু।

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle DEF$ সমদ্বিবাহু।



প্রমাণ : $\triangle BDF$ এবং $\triangle DCE$-এর মধ্যে $FB = \frac{1}{2}AB$ এবং $EC = \frac{1}{2}CA$.

$\therefore$ $FB = EC$ ($\because$ $\overline{AB}$ এবং $\overline{CA}$ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান) $\therefore$ $\overline{FB} \cong \overline{EC}$.

আবার D বিন্দু $\overline{BC}$-এর মধ্যবিন্দু বলিয়া $\overline{BD} \cong \overline{CD}$; কিন্তু $\angle B \cong \angle C$ ($\because$ $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$).

$\therefore$ $\triangle BDF \cong \triangle DCE$.

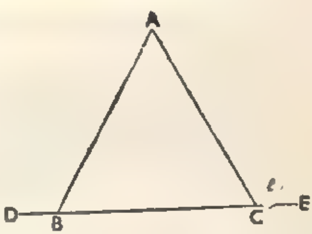
$\therefore$ $\overline{DF} \cong \overline{DE}$; অর্থাৎ $\triangle DEF$ সমদ্বিবাহু।

উপপাদ্য : যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সর্বসম হয়, তবে ঐ কোণগুলির বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সর্বসম হইবে।

উদা. কোন ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে যদি উৎপন্ন বহিঃকোণ দুইটি পরস্পর সর্বসম হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর ভূমি $\overline{BC}$-কে উভয় দিকে বর্ধিত করিয়া প্রাপ্ত বহিঃকোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle ABD$ এবং $\angle ACE$; এখানে $\angle ABD \cong \angle ACE$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।



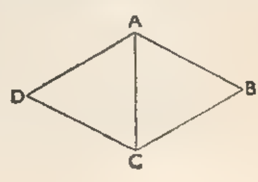
প্রমাণ : এখানে $\angle ABC$, $\angle ABD$-এর সম্পূরক এবং $\angle ACB$, $\angle ACE$-এর সম্পূরক।

$\therefore$ $\angle ABC \cong \angle ACB$

$\therefore$ $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; অর্থাৎ $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

উপপাদ্য : যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বসম হইবে।

উদা. ABCD রম্বসের কর্ণ $\overline{AC}$; দেখাও যে $\angle BAC \cong \angle CAD$ এবং $\angle ACB \cong \angle DCA$.



স্বীকার : ABCD রম্বসের কর্ণ $\overline{AC}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle BAC \cong \angle CAD$ এবং $\angle ACB \cong \angle DCA$

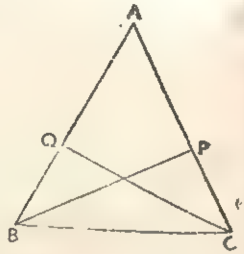
প্রমাণ : $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$-এর মধ্যে $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ এবং $\overline{CA} \cong \overline{AC}$

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\therefore \quad \angle BAC \cong \angle CAD$ এবং $\angle ACB \cong \angle DCA$

উপপাদ্য : যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহুর সহিত সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

উদা. কোন ত্রিভুজের দুইটি কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সর্বসম হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।



স্বীকার : ABC ত্রিভুজের B এবং C কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে $\overline{BP}$ এবং $\overline{CQ}$. এখানে $\overline{BP} \cong \overline{CQ}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ : PBC এবং QBC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে, $\overline{BP} \cong \overline{CQ}$ এবং অতিভুজ $\overline{BC}$ সাধারণ।

$\therefore \quad \triangle PBC \cong \triangle QBC$.

$\therefore \quad \angle QBC \cong \angle PCB$; অর্থাৎ $\angle ABC \cong \angle ACB$.

$\therefore \quad \triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{CA}$; $\qquad \therefore \quad \triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

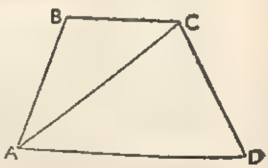
উপপাদ্য : কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর অসমান হইলে উহার বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উদা. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{DA}$ বৃহত্তম বাহু এবং $\overline{BC}$ ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ কর যে $\angle DCB$-এর পরিমাপ $> \angle BAD$-এর পরিমাপ।

স্বীকার : ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AD}$ বৃহত্তম বাহু এবং $\overline{BC}$ ক্ষুদ্রতম বাহু।

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle DCB$-এর পরিমাপ $> \angle BAD$-এর পরিমাপ।

অঙ্কন : $\overline{AC}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$ বাহু, $\overline{BC}$ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore \quad \angle ACB$-এর পরিমাপ $> \angle BAC$-এর পরিমাপ$\cdots$(i).

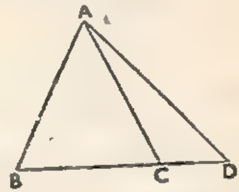
আবার DAC ত্রিভুজের $\overline{DA}$ বাহু, $\overline{CD}$ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore$ $\angle$DCA-এর পরিমাপ $>$ $\angle$CAD-এর পরিমাপ…(ii).

$\therefore$ $\angle$DCA-এর পরিমাপ $+$ $\angle$ACB-এর পরিমাপ $>$ $\angle$CAD-এর পরিমাপ $+$ $\angle$BAC-এর পরিমাপ। $\therefore$ $\angle$DCB-এর পরিমাপ $>$ $\angle$BAD-এর পরিমাপ।

উপপাদ্য ঃ কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর অসমান হইলে বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উদা. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\overline{BC}$ ভূমিকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, AD$>$AC.



স্বীকার ঃ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; অর্থাৎ $\angle$CBA$\cong$$\angle$ACB ; $\overline{BC}$ ভূমিকে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $\overline{AD}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ AD$>$AC

প্রমাণ ঃ $\triangle$ABC-এর বহিঃ $\angle$DCA-এর পরিমাপ $>$ অন্তঃ $\angle$CBA-এর পরিমাপ।

আবার $\triangle$ACD-এর বহিঃ $\angle$ACB-এর পরিমাপ$>$অন্তঃ $\angle$ADC-এর পরিমাপ।

কিন্তু $\angle$CBA$\cong$$\angle$ACB ; $\therefore$ $\angle$DCA-এর পরিমাপ$>$$\angle$ADC-এর পরিমাপ।

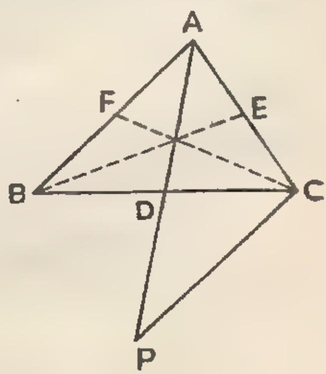
এখন $\triangle$ACD-এর $\angle$DCA এবং $\angle$ADC-এর বিপরীত বাহু যথাক্রমে $\overline{AD}$ এবং $\overline{AC}$.

$\therefore$ AD$>$AC।

উপপাদ্য ঃ ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদা. কোন ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

স্বীকার ঃ $\triangle$ABC-এর মধ্যমা তিনটি যথাক্রমে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$; অতএব BD$=\frac{1}{2}$ BC, CE$=\frac{1}{2}$ CA এবং AF$=\frac{1}{2}$ AB.



প্রামাণ্য বিষয় ঃ (AD$+$BE$+$CF)$<$(AB $+$BC$+$CA).

অঙ্কন ঃ $\overline{AD}$কে P পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন $\overline{AD} \cong \overline{DP}$ হয়। $\overline{PC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ $\triangle$ABD এবং $\triangle$PCD-এর মধ্যে $\overline{BD} \cong \overline{DC}$, $\overline{DA} \cong \overline{PD}$ এবং $\angle$ADB$\cong$$\angle$PDC.

$\therefore$ $\triangle$ABD$\cong$$\triangle$DPC

$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{PC}$.

এখন $\triangle APC$ হইতে, $(PC+CA)>AP$

$\therefore \quad (AB+CA)>2\,AD \cdots\cdots(i) \quad [\because \quad \overline{AD} \cong \overline{DP}]$

অনুরূপে $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ মধ্যমা দুইটিকে লইয়া দেখান যায় যে,

$(AB+BC)>2BE \quad \cdots \quad \cdots(ii)$

এবং $(BC+CA)>2\,CF \quad \cdots \quad \cdots(iii)$

$\therefore \quad (AB+CA)+(AB+BC)+(BC+CA)>2\,AD+2\,BE+2\,CF.$

[(i), (ii) ও (iii) হইতে]

$\therefore \quad 2\,(AB+BC+CA)>2\,(AD+BE+CF)$

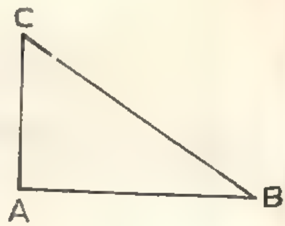
$\therefore \quad (AD+BE+CF)<(AB+BC+CA)$

উপপাদ্য ঃ বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি রেখাংশ টানা যায় তাহাদের মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

উদা. দেখাও যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু

স্বীকার ঃ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC$ সমকোণ।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\overline{BC}$ বাহুই ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু।



প্রমাণ ঃ $\overline{AB}$ রেখাংশের বহিঃস্থ C বিন্দু হইতে উহার উপর $\overline{CA}$ এবং $\overline{CB}$ রেখাংশ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে। এখন $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ বলিয়া $\overline{CA}$ রেখাংশ, $\overline{CB}$ রেখাংশ হইতে ক্ষুদ্রতর। আবার $\overline{CA}$ রেখাংশের বহিঃস্থ বিন্দু B হইতে উহার উপর $\overline{BC}$ এবং $\overline{BA}$ রেখাংশ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে।

যেহেতু $\overline{BA} \perp \overline{AC}$, অতএব $\overline{BA}$ লম্ব, $\overline{BC}$ রেখাংশ হইতে ক্ষুদ্রতর।

অতএব ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজ BC-ই বৃহত্তম বাহু।

অনুশীলনী 1

1. $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (i) যদি $\angle CPA$-এর পরিমাপ 45° হয় তবে $\angle BPC$, $\angle DPB$ এবং $\angle APD$-এর প্রত্যেকটির পরিমাপ নির্ণয় কর ; (ii) যদি $\angle APD$ এবং $\angle BPC$-এর পরিমাপ একত্রে 210° হয়, তবে $\angle CPA$-এর পরিমাপ কত ?

2. যে-কোন কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণটি এক সমকোণ।

3. যে-সকল সরলরেখা একই সরলরেখার উপর লম্ব তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

4. দেখাও যে, একান্তর কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

5. কোন ত্রিভুজের একটি কোণের পরিমাপ অপর দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টির দ্বিগুণ। বৃহত্তম কোণটির পরিমাপ ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

6. কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃ-কোণগুলির পরিমাপ মোট আট সমকোণ হইবে।

7. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরস্পর সর্বসম বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকেই সূক্ষ্মকোণ।

8. সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশটি অতিভুজের অর্ধেক।

9. $\triangle ABC$-এর $\angle A$-এর পরিমাপ 30° এবং $\angle B$-এর পরিমাপ 90° হইলে দেখাও যে, $AC=2BC$.

10. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। দেখাও যে $\angle BOC$-এর পরিমাপ$=90^\circ-\frac{1}{2}$($\angle A$-এর পরিমাপ)।

11. কোন চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্ভূত কোণটির পরিমাপ অবশিষ্ট কোণ দুইটির মোট পরিমাপের অর্ধেক।

12. ABC ত্রিভুজের মধ্যে P যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\angle BPC$, $\angle BAC$ হইতে বৃহত্তর।

13. ABC বিষমবাহু ত্রিভুজের $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\overline{BC}$ বাহুকে P বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$ হয়, তবে দেখাও যে PAQ কোণটির পরিমাপ $\angle B$ এবং $\angle C$-এর পরিমাপের অন্তরফলের অর্ধেক।

14. দেখাও যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি সরলরেখার উপর তিনটি সমান সরলরেখা টানা সম্ভব নয়।

15. দুইটি সুষম বহুভুজের একটির বাহুসংখ্যা অপরটির বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ। যদি প্রথমটির একটি কোণের পরিমাপের সহিত দ্বিতীয়টির একটি কোণের পরিমাপের অনুপাত 9 : 8 হয়, তবে প্রত্যেকটি বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত?

16. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। প্রমাণ কর যে, ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

17. দেখাও যে, যে-কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুই উহার বাহুদ্বয় হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

18. ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ $\overline{AB}$; A কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AD}$, $\overline{BC}$ বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, (AC+CD)=AB.

19. ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\overline{BC}$ বাহুর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ এবং $\angle ACB$-এর পরিমাপ $66°$ হয় তবে $\angle ABC$-এর মান কত ?

20. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{AB}$, $\overline{AC}$-এর উপর D, E বিন্দুদ্বয়কে এরূপে লওয়া হইল যেন $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\triangle ACD \cong \triangle ABE$

21. দেখাও যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত রেখাগুলির মধ্যে মধ্যমাই ক্ষুদ্রতর।

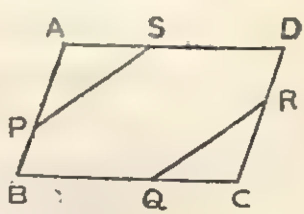
22. দেখাও যে, ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

23. কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

24. ABC ত্রিভুজের মধ্যে O যে-কোন একটি বিন্দু। দেখাও যে, $(OA+OB+OC)<\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

উপপাদ্য ঃ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি ও কোণগুলি পরস্পর সর্বসম এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

উদা. ABCD সামান্তরিকের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ বাহুর উপর যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দু চারিটি এরূপে অবস্থিত যে $\overline{AP} \cong \overline{CQ}$ এবং $\overline{AS} \cong \overline{CR}$ দেখাও যে, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.



স্বীকার ঃ ABCD সামান্তরিকের $\angle A \cong \angle C$ এবং $\angle B \cong \angle D$; আবার $\overline{AS} \cong \overline{CR}$ এবং $\overline{AP} \cong \overline{CQ}$.

অঙ্কন ঃ $\overline{PS}$ এবং $\overline{QR}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.

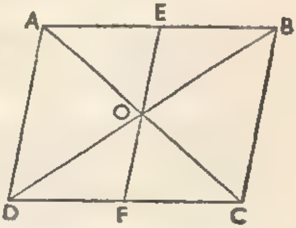
প্রমাণ ঃ $\triangle APS$ এবং $\triangle CQR$-এর মধ্যে $\overline{AP} \cong \overline{CQ}$, $\overline{AS} \cong \overline{CR}$ এবং $\angle PAS \cong \angle RCQ$. $\therefore$ $\triangle APS \cong \triangle CQR$ $\therefore$ $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.

উপপাদ্য ঃ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদা. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O ; O বিন্দুগামী রেখাংশ $\overline{EF}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে $\overline{EF}$, ABCD সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

স্বীকার ঃ ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুগামী রেখাংশ $\overline{EF}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ AEFD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = EBCF ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।



প্রমাণ ঃ DOF এবং BOE ত্রিভুজদ্বয়ে $\overline{OD} \cong \overline{OB}$, $\angle ODF \cong$ একান্তর $\angle OBE$ এবং $\angle FOD \cong$ বিপ্রতীপ $\angle EOB$.

$\therefore$ $\triangle DOF \cong \triangle BOE$.

$\therefore$ $\triangle DOF$-এর ক্ষেত্রফল $\cong$ $\triangle BOE$-এর ক্ষেত্রফল।

অনুরূপে, $\triangle FOC$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle EOA$-এর ক্ষেত্রফল এবং $\triangle AOD$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle COB$-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ ক্ষেঃ $\triangle DOF$ + ক্ষেঃ $\triangle AOD$ + ক্ষেঃ $\triangle EOA$ = ক্ষেঃ $\triangle BOE$ + ক্ষেঃ $\triangle COB$ + ক্ষেঃ $\triangle FOC$.

$\therefore$ AEFD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = EBCF ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য ঃ একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক হইবে

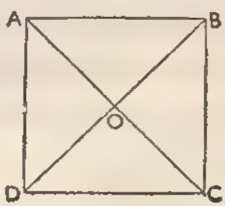
যদি (i) বিপরীত বাহুগুলি সর্বসম হয়,

অথবা (ii) বিপরীত কোণগুলি সর্বসম হয়,

অথবা (iii) দুইটি বিপরীত বাহু সর্বসম ও সমান্তরাল হয়,

অথবা (iv) কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদা. যদি কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সর্বসম হয় এবং পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।



স্বীকার ঃ ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় সর্বসম। উহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে $\overline{AO} \cong \overline{OC}$, $\overline{OD} \cong \overline{OB}$ এবং $\angle AOD$ ও $\angle BOA$ প্রত্যেকে সমকোণ।

প্রামাণ্য বিষয় : ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ : যেহেতু $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ এবং $\overline{OD} \cong \overline{OB}$;

অতএব, ABCD একটি সামান্তরিক।

আবার, $\triangle ADC$ এবং $\triangle BCD$-এর মধ্যে $\overline{DA} \cong \overline{BC}$, $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ এবং $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

$\therefore \quad \triangle ADC \cong \triangle BCD$

এখন, $\angle CDA \cong \angle BCD$; কিন্তু $\angle CDA$-এর পরিমাপ $+$ $\angle BCD$-এর পরিমাপ $= 2$ সমকোণ।

$\therefore \quad 2\angle CDA$-এর পরিমাপ $= 2$ সমকোণ ;

$\therefore \quad \angle CDA$-এর পরিমাপ $= 1$ সমকোণ।

আবার, $\triangle DOA$ এবং $\triangle AOB$-এর মধ্যে $\overline{DO} \cong \overline{OB}$, $\angle AOD \cong \angle BOA$ এবং $\overline{AO}$ সাধারণ।

$\therefore \quad \triangle DOA \cong \triangle AOB$

$\therefore \quad \overline{AB} \cong \overline{DA}$

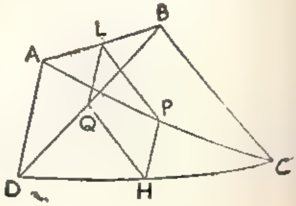
$\therefore \quad$ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

উপপাদ্য : তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা ছিন্ন কোন একটি ছেদকের অংশগুলি যদি পরস্পর সর্বসম হয়, তবে উক্ত সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা ছিন্ন অপর যে-কোন ছেদকের অনুরূপ অংশগুলিও পরস্পর সর্বসম হইবে।

উপপাদ্য : ত্রিভুজের কোন এক বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে উহার অপর একটি বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ যদি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয় তবে উক্ত রেখাংশ অপর বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং তৃতীয় বাহুর অর্ধেক হয়।

উপপাদ্য : কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হইবে।

উদা. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে L এবং H ; চতুর্ভুজটির $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q হইলে দেখাও যে, QLPH একটি সামান্তরিক।



স্বীকার : ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$-এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে L এবং H ; আবার $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণদুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয় যথক্রেমে P এবং Q।

প্রামাণ্য বিষয় : QLPH একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ ঃ $\triangle$ABD-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{BD}$-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L এবং Q।

$\therefore$ $\overline{QL} \parallel \overline{DA}$ এবং $QL = \frac{1}{2}AD$।

আবার, $\triangle$ACD-এর $\overline{AC}$ এবং $\overline{CD}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং H,

$\therefore$ $\overline{PH} \parallel \overline{AD}$ এবং $PH = \frac{1}{2}AD$।

$\therefore$ $QL = \frac{1}{2}.AD = PH$

$\therefore$ $\overline{QL} \cong \overline{PH}$;

কিন্তু $\overline{PH} \parallel \overline{QL}$।

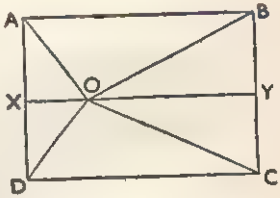
$\therefore$ QLPH একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য ঃ (*i*) একই ভূমির উপর ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

(*ii*) একই ভূমির উপর অবস্থিত ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

উদা. ABCD সামান্তরিকের মধ্যে O যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল একত্রে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

স্বীকার ঃ ABCD একটি সামান্তরিক এবং O উহার অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ এবং $\overline{OD}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রামাণ্য বিষয় ঃ OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

প্রমাণ ঃ O বিন্দু দিয়া $\overline{AB}$ বা $\overline{DC}$-এর সমান্তরাল করিয়া $\overline{XY}$ অঙ্কন করা হইল উহা $\overline{DA}$ এবং $\overline{BC}$-এর সহিত যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন $\triangle$OAB এবং ABYX সামান্তরিক একই ভূমি $\overline{AB}$-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল $\overline{AB}$ ও $\overline{XY}$-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\triangle$OAB-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$.(ABYX সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)।

অনুরূপে, $\triangle$ODC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (DXYC সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)।

$\therefore$ $\triangle$OAB-এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle$ODC-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ (ABYX সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $+$ DXYC সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)

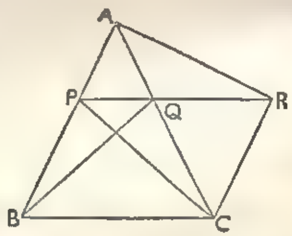
$= \frac{1}{2}$ (ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)।

উপপাদ্য ঃ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

উপপাদ্য ঃ সমান সমান ভূমির এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

উদা. $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ বাহুর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়া $\overline{BC}$ বাহুর সর্বসম এবং সমান্তরাল করিয়া $\overline{PR}$ টানা হইল। $\overline{PR}$, $\overline{CA}$ বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে $\triangle AQR$ এবং $\triangle QPB$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

স্বীকার ঃ $\triangle ABC$ এর $\overline{AB}$ বাহুর উপরিস্থিত P বিন্দু হইতে অঙ্কিত রেখাংশ $\overline{PR}$ উক্ত ত্রিভুজটির $\overline{CA}$ বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ এবং $PR = BC$.



প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\triangle AQR$ এবং $\triangle QPB$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কন ঃ $\overline{PC}$ এবং $\overline{RC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, PBCR একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{RC}$; এখন $\triangle APC$ এবং $\triangle APR$ একই ভূমি $\overline{AP}$-এর উপর অবস্থিত এবং উহারা $\overline{AB}$ ও $\overline{RC}$ সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে আছে।

$\therefore$ $\triangle APC$ এবং $\triangle APR$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

$\therefore$ ক্ষেঃ $\triangle APC$ − ক্ষেঃ $\triangle APQ$ = ক্ষেঃ $\triangle APR$ − ক্ষেঃ $\triangle APQ$

$\therefore$ $\triangle AQR$ এবং $\triangle PCQ$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

আবার $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ বলিয়া, $\triangle PBQ$ এবং $\triangle PCQ$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

$\therefore$ $\triangle AQR$ এবং $\triangle PBQ$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

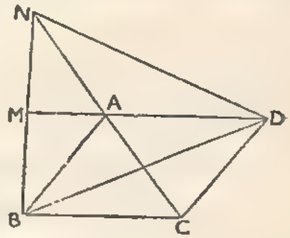
উপপাদ্য ঃ একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহ একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

উদা. ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় $\overline{BC}$ ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু হইলে দেখাও যে, $\triangle ABC$-এর পরিসীমা $\triangle DBC$-এর পরিসীমা হইতে ক্ষুদ্রতর।

স্বীকার ঃ (i) $\triangle ABC$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle DBC$-এর ক্ষেত্রফল, (ii) $\overline{AB} \cong \overline{CA}$ এবং (iii) ABC এবং DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমির উপর অবস্থিত।

প্রামাণ্য বিষয় : $(AB+BC+CA)<(DB+BC+CD)$

অঙ্কন : $\overline{AD}$ অঙ্কন করা হইল। B-বিন্দু হইতে বর্ধিত $\overline{DA}$-এর উপর $\overline{BM}$ লম্ব টানা হইল। $\overline{CA}$-কে বর্ধিত করাতে উহা $\overline{BM}$-এর বর্ধিতাংশের সহিত N বিন্দুতে মিলিত হইল। $\overline{ND}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; অর্থাৎ $\overline{BC} \parallel \overline{MD}$

$\because$ $\angle NBC$ সমকোণ ; $\therefore$ $\triangle NBC$-এর $\angle BNC$-এর পরিমাপ $+$ $\angle NCB$-এর পরিমাপ $=90^\circ$

$\therefore$ $\angle BNC$-এর পরিমাপ $+$ $\angle NCB$-এর পরিমাপ $=$ $\angle NBA$-এর পরিমাপ $+$ $\angle ABC$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\angle BNC \cong \angle NBA$ ($\because$ $\angle ABC \cong \angle ACB \cong \angle NCB$)

$\therefore$ $\overline{AN} \cong \overline{AB}$……(a)

আবার, $\triangle ANB$-এর $\overline{AM} \perp \overline{NB}$; $\therefore$ $\overline{MN} \cong \overline{MB}$; অতএব $\overline{DN} \cong \overline{DB}$.

এখন $\triangle DNC$-এর, $NC<(DN+CD)$

অর্থাৎ, $(AN+CA)<(DB+CD)$.

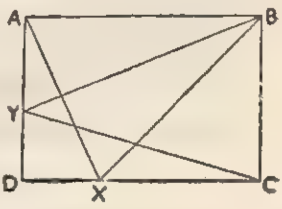
অর্থাৎ, $(AB+CA)<(DB+CD)$, [(a) হইতে].

$\therefore$ $(AB+BC+CA)<(DB+BC+CD)$.

উপপাদ্য : যদি একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

উদা. ABCD একটি সামান্তরিক। X ও Y যথাক্রমে $\overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$-এর উপরিস্থিত যে-কোন দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AXB এবং BYC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

স্বীকার : ABCD সামান্তরিকের $\overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$ বাহুর উপর যথাক্রমে X এবং Y যে-কোন দুইটি বিন্দু।



প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle AXB$-এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle BYC$-এর ক্ষেত্রফল,

অঙ্কন : $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{BY}$ এবং $\overline{CY}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle AXB$ এবং ABCD সামান্তরিক একই ভূমি $\overline{AB}$-এর উপর অবস্থিত এবং উহারা $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে আছে। $\triangle AXB$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ABCD সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল)। অনুরূপে, $\triangle BYC$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)।

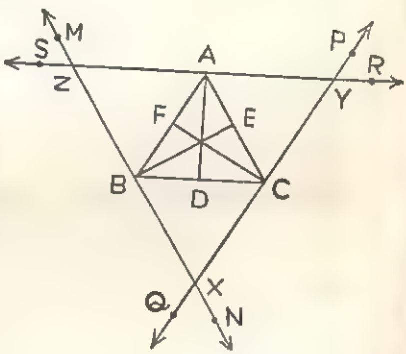
$\therefore$ $\triangle AXE$-এর ক্ষেত্রফল $= \triangle BYC$-এর ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য : ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু।

উদা : ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব রেখাংশগুলি একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

স্বীকার : ABC ত্রিভুজের A, B এবং C বিন্দু হইতে উহাদের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় যথাক্রমে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$; $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ রেখাংশ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-কে যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ্য বিষয় : $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ রেখাংশ তিনটি সমবিন্দু।



প্রমাণ : ABC ত্রিভুজের A, B এবং C বিন্দু দিয়া $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে $\overleftrightarrow{SR}$, $\overleftrightarrow{NM}$ এবং $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখা তিনটি টানা হইল।

মনে কর, X, Y, Z যথাক্রমে $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{NM}$-এর, $\overleftrightarrow{SR}$ এবং $\overleftrightarrow{PQ}$-এর এবং $\overleftrightarrow{NM}$ এবং $\overleftrightarrow{SR}$-এর ছেদবিন্দু।

এখন, AZBC সামান্তরিকের $\overline{ZA} \cong \overline{BC}$ এবং ABCY সামান্তরিকের $\overline{AY} \cong \overline{BC}$.

$\therefore$ A বিন্দু $\overline{ZY}$-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, $\overline{BC} \parallel \overline{ZY}$ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. $\therefore$ $\overline{DA} \parallel \perp \overline{ZY}$.

অনুরূপে, B বিন্দু $\overline{ZX}$-এর মধ্যবিন্দু এবং $\overline{EB} \perp \overline{ZX}$.

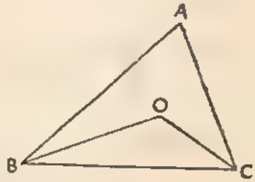
আবার, C বিন্দু $\overline{XY}$-এর মধ্যবিন্দু এবং $\overline{FC} \perp \overline{XY}$.

$\therefore$ XYZ ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় যথাক্রমে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$; অতএব $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ সমবিন্দু।

উপপাদ্য ঃ ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

উদা. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O হইলে প্রমাণ কর যে. $\angle BOC$-এর পরিমাপ $= 90^\circ + \frac{1}{2}$ ($\angle A$-এর পরিমাপ)।

স্বীকার ঃ ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O.



প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\angle BOC$-এর পরিমাপ $= 90^\circ + \frac{1}{2}$ ($\angle A$-এর পরিমাপ)।

অঙ্কন ঃ $\overline{OB}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ $\triangle OBC$ হইতে,

$\angle CBO$-এর পরিমাপ $= \frac{1}{2}$ ($\angle B$-এর পরিমাপ)

এবং $\angle OCB$-এর পরিমাপ $= \frac{1}{2}$ ($\angle C$-এর পরিমাপ)

এখন $\angle BOC$-এর পরিমাপ $+ \angle CBO$-এর পরিমাপ $+ \angle OCB$-এর পরিমাপ $= 180^\circ$.

$\therefore$ $\angle BOC$-এর পরিমাপ $+ \frac{1}{2}$ ($\angle B$-এর পরিমাপ $+ \angle C$-এর পরিমাপ) $= 180^\circ$.

$\angle BOC$-এর পরিমাপ $+ \frac{1}{2}$ ($\angle B$-এর পরিমাপ $+ \angle C$-এর পরিমাপ $+ \angle A$-এর পরিমাপ) $= 180^\circ + \frac{1}{2}$ ($\angle A$-এর পরিমাপ).

$\therefore$ $\angle BOC$-এর পরিমাপ $+ 90^\circ = 180^\circ + \frac{1}{2}$ (A-এর পরিমাপ)।

$\therefore$ $\angle BOC$-এর পরিমাণ $= 90^\circ + \frac{1}{2}$ ($\angle A$-এর পরিমাপ).

সম্পাদ্য 1. এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার একটি কোণ নির্দিষ্ট কোণের সহিত সর্বসম হয়।

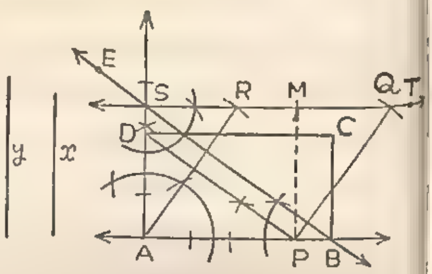
সম্পাদ্য 2. একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

উদা. 1. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান করিয়া এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সহিত সর্বসম হয়।

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র। x এবং y দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশ।

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় x ও y-এর দৈর্ঘ্যের সমান এবং যাহার ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : $\overline{AB}$ অথবা $\overline{AB}$-এর বর্ধিতাংশ হইতে x-এর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া $\overline{AP}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{DP}$ অঙ্কন কর। $\overline{PD}$-এর সমান্তরাল করিয়া B বিন্দু হইতে অঙ্কিত সরলরেখা $\overline{AD}$-এর বর্ধিতাংশের সহিত S বিন্দুতে মিলিত হইল। S হইতে $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{ST}$ সরলরেখা অঙ্কন কর।



A-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। মনে কর, উক্ত চাপটি $\overrightarrow{ST}$-কে R বিন্দুতে ছেদ করিল। R-কে কেন্দ্র করিয়া R $\overrightarrow{}$ হইতে $\overline{AP}$-এর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া RQ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{PQ}$ অঙ্কন কর।

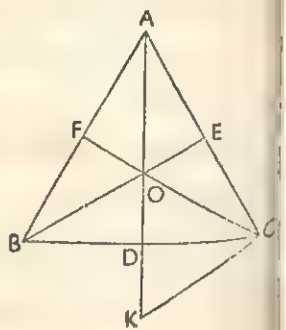
তাহা হইলে APQR-ই নির্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ : SAPM আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

এখন, APQR সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = SAPM আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য : ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

উদা. ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য একত্র যোগে তৃতীয় মধ্যমার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।



স্বীকার : ABC একটি ত্রিভুজ। উহার $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : ত্রিভুজটির যে-কোন দুইটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য একত্রে তৃতীয় মধ্যমার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন : $\overline{AD}$-কে K পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইল যাহাতে $\overline{DK} \cong \overline{DO}$ হয়। $\overline{CK}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : DBO এবং DKC ত্রিভুজদ্বয়ে $\overline{DK} \cong \overline{DO}$ (অঙ্কন),
$\angle KDC \cong \angle BDO$ (বিপ্রতীপ) এবং $\overline{DC} \cong \overline{DB}$।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\overline{KC} \cong \overline{BO}$ $\therefore$ $KC = BO$

এখন, OCK ত্রিভুজ হইতে, $(OC+KC) > OK$

$\therefore \quad (OC+BO) > OK.$

আবার, $AO = 2OD = 2DK.$

$\therefore \quad AO = (OD+DK) = OK.$

$\therefore \quad (OC+BO) > AO$

এখন, $OC = \frac{2}{3}CF$, $BO = \frac{2}{3}BE$ এবং $AO = \frac{2}{3}AD.$

$\therefore \quad \frac{2}{3}(CF+BE) > \frac{2}{3}AD$

$\therefore \quad (CF+BE) > AD$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $(BE+AD) > CF$

এবং $(CF+AD) > BE.$

অনুশীলনী 2

1. এমন দুইটি চতুর্ভুজের নাম কর যাহাদের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ সমান। উহাদের প্রত্যেকটির কর্ণদ্বয় কি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে ?

2. ABCD সামান্তরিকের $\angle A$-এর পরিমাপ $\angle B$-এর পরিমাপের চারগুণ হইলে সামান্তরিকের কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।

3. একটি সামান্তরিকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 65 সে. মি. ; ইহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য অপর একটি বাহুর দ্বিগুণ অপেক্ষা 15 সে. মি. বেশি হইলে বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিলে যে-ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।

5. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$-র মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F ; $\triangle ABC$-এর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সে. মি. হইলে DEFC চতুর্ভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি কত ?

6. একটি মধ্যমা কি ত্রিভুজকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে ?

7. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় কি উহাকে চারটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে ?

8. কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের সমান। বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল সমকোণী ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের কতগুণ ?

9. (i) কোন্ প্রকারের ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র একই বিন্দুতে থাকিবে ? (ii) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র সর্বদাই কি ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ?

10. সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজটির লম্ববিন্দু মূল ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর সহিত কি একই হইবে ?

11. সামান্তরিকের চারটি বাহু সমান হইলে প্রত্যেক কর্ণ উহার বিপরীত কোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

12. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ এবং $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; প্রমাণ কর যে $\angle DAB \cong \angle CBA$ এবং $\angle ADC \cong \angle BCD$. যদি $\angle DAB$-এর পরিমাপ 50° হয়, তবে $\angle BCD$-এর পরিমাপ কত ডিগ্রী হইবে ?

13. ABCD একটি সামান্তরিক, X, $\overline{CD}$-এর মধ্যবিন্দু। $\angle AXB$ সমকোণ হইলে দেখাও যে, $AB = 2BC$.

14. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC} \cong \overline{BA}$; যদি P, Q, R যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$-এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে দেখাও যে RQBP একটি রম্বস।

15. $\overline{APB}$ এবং $\overline{CQD}$ রেখাংশদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। দেখাও যে $\angle APQ$, $\angle BPQ$, $\angle CQP$ এবং $\angle PQD$-এর সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র গঠন করে।

16. ABCD সামান্তরিকের $\overline{AD}$ বাহুর উপর P একটি বিন্দু। দেখাও যে $\triangle PAB$-এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle PCD$-এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle PBC$-এর ক্ষেত্রফল।

17. $\triangle ABC$ এবং $\triangle DBC$ একই ভূমি $\overline{BC}$-এর উপর অবস্থিত। $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ এবং $\overline{BD}$, $\overline{AC}$-কে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে। দেখাও যে $\triangle BEC$-এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle CED$-এর ক্ষেত্রফল।

18. 4·2 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলযুক্ত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

19. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হইলে দেখাও যে $\angle OBC$-এর পরিমাপ $= 90^\circ - \angle A$-এর পরিমাপ।

20. কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং পরিকেন্দ্র একই বিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমবাহু।

21. কোন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

22. একটি চতুর্ভুজের কোন কৌণিক বিন্দু হইতে একটি রেখাংশ টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। [S. F. '54]

23. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

24. 2·5 সে. মি. দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলযুক্ত একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

25. একটি চতুর্ভুজের কোন বাহুর উপরিস্থিত একটি বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

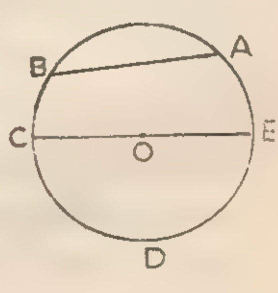
বৃত্ত সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

দৈনন্দিন জীবনে তোমরা যে সকল বস্তুর সঙ্গে পরিচিত তাহাদের অনেকেরই আকার বৃত্তের মত, যেমন ছোট বড গাড়ীর চাকা, বিভিন্ন পাত্র, যন্ত্রাংশ প্রভৃতি। ভিন্ন ভিন্ন জ্যামিতিক চিত্রগুলির মধ্যে বৃত্ত একটি বিশেষ স্থান অধিকার করিয়াছে। প্রকৃতপক্ষে, যন্ত্রবিদ্যায় বৃত্তের ব্যাপক ব্যবহার দেখা যায়। এই অধ্যায়ে বৃত্ত সম্বন্ধীয় কতকগুলি জ্যামিতিক বিষয়ের আলোচনা করা হইবে।

2.1. সংজ্ঞা ঃ কোন সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং $\overline{MN}$ একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। মনে কর, $\overline{MN}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য r। এখন উক্ত সমতলে O বিন্দু হইতে r দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহের দ্বারা উৎপন্ন জ্যামিতিক চিত্রকে **বৃত্ত** (Circle) বলে। নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে উক্ত বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre বলা হয়।

বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দু X হইলে $\overline{OX}$ রেখাংশটিকে বৃত্তটির **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে। যদি বৃত্তটির ধারক-তলে P এরূপ একটি বিন্দু হয় যে,
(i) $OP<OX$, তবে P বিন্দুটিকে বৃত্তের **অন্তঃস্থবিন্দু** (Interior point) এবং
(ii) $OP>OX$, তবে P বিন্দুকে বৃত্তের **বহিঃস্থবিন্দু** (Exterior point) বলে। কেন্দ্রবিন্দু, বৃত্তের অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ কোন বিন্দুই বৃত্তের অংশ নহে। যে-বিন্দুগুলির সমন্বয়ে বৃত্তটি গঠিত হইয়াছে তাহাদের প্রত্যেকটি বিন্দুকেই বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু বলা হয়।

যে রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় বৃত্তের উপর অবস্থিত তাহাকে বৃত্তের জ্যা (Chord) বলে। কেন্দ্রবিন্দুগামী জ্যা-কে বৃত্তের **ব্যাস** (Diameter) বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে ABCDE বৃত্তে AB জ্যা এবং CE ব্যাস। এখন $\overline{OC}\cong\overline{OE}$; অতএব $OC=OE$। অতএব O বিন্দু CE-এর মধ্যবিন্দু। অর্থাৎ বৃত্তের ব্যাস উহার কেন্দ্রবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।



দুই বা ততোধিক বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান হইলে উহাদের **সর্বসম বৃত্ত** বলে।

কোন তলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক বৃত্তের একই কেন্দ্রবিন্দু হইলে ঐ বৃত্তসমূহকে **সমকেন্দ্রিক বৃত্ত** বলে।

উপপাদ্য 1

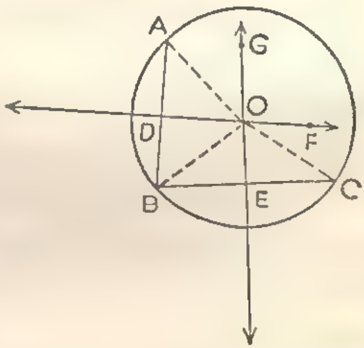
একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত গঠিত হইতে পারে।

[There is one circle and only one, which passes through three given points]

স্বীকার: A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রামাণ্য বিষয়: A, B, C বিন্দু দিয়া একটিমাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অঙ্কন: AB এবং BC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে $\overleftrightarrow{DF}$ এবং $\overleftrightarrow{EG}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ: যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় অতএব $\overleftrightarrow{DF}$ এবং $\overleftrightarrow{EG}$ পরস্পর সমান্তরাল হইতে পারে না। মনে কর, $\overleftrightarrow{DF}$ এবং $\overleftrightarrow{EG}$ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overline{OA}$, $\overline{CB}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

এখন O বিন্দু $\overline{AB}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; অনুরূপে, $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. $\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{CB} \cong \overline{OC}$.

$\therefore$ O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C বিন্দুগামী হইবে।

এখন $\overleftrightarrow{DF}$ এবং $\overleftrightarrow{EG}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। অতএব এক্ষেত্রে বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু A, B, C এবং কেন্দ্রবিন্দু O নির্দিষ্ট, সুতরাং প্রদত্ত বিন্দু তিনটি দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা সম্ভব।

অনুসিদ্ধান্ত 1. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

উপপাদ্য 2

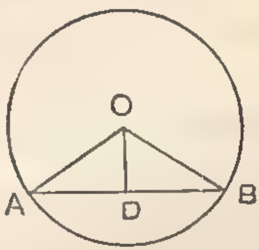
কোন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর মধ্য দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিলে, ইহা যদি বৃত্তের ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে অঙ্কিত সরলরেখাটি উক্ত জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, কেন্দ্রবিন্দু হইতে কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord and conversely, the perpendicular to a chord from the centre of a circle bisects the chord.]

স্বীকার : মনে কর বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু O এবং বৃত্তের ব্যাস নহে এরূপ একটি জ্যা $\overline{AB}$; D বিন্দু $\overline{AB}$-জ্যায়ের মধ্যবিন্দু। অর্থাৎ, DA = DB.

প্রামাণ্য বিষয় : O এবং D বিন্দুগামী সরলরেখা, $\overline{AB}$-এর উপর লম্ব।



অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে DA = DB ;

$\therefore \quad \overline{DA} \cong \overline{DB}$.

এখন $\triangle AOD$ এবং $\triangle BOD$-এর মধ্যে,

$\overline{DA} \cong \overline{DB}$ (স্বীকার)

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (ব্যাসার্ধ) এবং $\overline{OD}$ সাধারণ বাহু।

$\therefore \quad \triangle ODA \cong \triangle ODB$.

$\therefore \quad \angle ODA \cong \angle ODB$ এবং ইহারা পরস্পর সম্পূরক বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ। $\therefore \quad \overline{OD} \perp \overline{AB}$.

যেহেতু $\overline{OD}$, O এবং D বিন্দুগামী সরলরেখার উপর অবস্থিত অতএব O, D বিন্দুগামী সরলরেখা, $\overline{AB}$-এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে,

স্বীকার : মনে কর বৃত্তের কেন্দ্র O, জ্যা $\overline{AB}$ এবং $\overline{OD} \perp \overline{AB}$.

প্রামাণ্য বিষয় : DA = DB.

অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ ODA এবং ODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle ODA \cong \angle ODB$ (সমকোণ)

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (অতিভুজ) এবং $\overline{OD}$ সাধারণ বাহু।

$\therefore \quad \triangle ODA \cong \triangle ODB.$

$\therefore \quad \overline{DA} \cong \overline{DB}$; $\quad \therefore \quad DA = DB.$

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের যে-কোন জ্যা-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক উহার কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. একই সরলরেখায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু কোন বৃত্তের উপর অবস্থিত হইতে পারে না।

অনুশীলনী 3

1. কোন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু O এবং জ্যা $\overline{AB}$; যদি $OA = 5$ সে. মি. এবং O বিন্দু হইতে $\overline{AB}$ জ্যা-এর দূরত্ব [illegible] সে.মি. হয়, তবে $\triangle OAB$-এর ক্ষেত্রফল কত ?

2. কোন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু হইতে 24 সে.মি. দীর্ঘ একটি জ্যা-এর দূরত্ব 5 সে.মি. ; বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু হইতে কোন জ্যা-এর দূরত্ব 12 সে.মি. হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত ?

3. 30 সে.মি. দীর্ঘ একটি জ্যা-এর কেন্দ্রবিন্দু হইতে দূরত্ব 20 সে.মি.। উক্ত বৃত্তের 14 সে.মি. দীর্ঘ জ্যা-এর কেন্দ্রবিন্দু হইতে দূরত্ব কত ?

4. তোমাকে একটি ধাতুনির্মিত বৃত্তাকার চাক্তির কেন্দ্রবিন্দু নির্ণয় করিতে বলা হইল। তুমি কিরূপে সমস্যাটির সমাধান করিবে ?

5. ABC বৃত্তের অন্তঃস্থ বিন্দু O ; যদি $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$ হয়, তবে দেখাও যে O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হইবে।

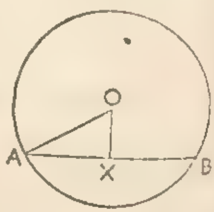
6. প্রমাণ কর যে, ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

স্বীকার ঃ বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ $\overline{OA}$ এবং বৃত্তটির ব্যাস নহে এরূপ যে-কোন একটি জ্যা $\overline{AB}$.

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $AB < 2\,OA$.

অঙ্কন ঃ $\overline{OX} \perp \overline{AB}$ টানা হইল।

প্রমাণ ঃ $\triangle AOX$ সমকোণী এবং উহার অতিভুজ OA.



$\therefore \quad AX < OA$. অর্থাৎ, $2\,AX < 2\,OA$

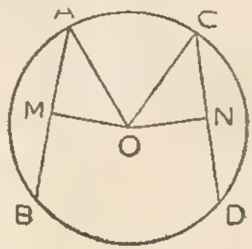
$\therefore \quad AB < 2\,OA$ ($\because \quad 2\,AX = AB$).

7. দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাংশটি কেন্দ্রবিন্দুগামী হইবে।

৪. প্রমাণ কর যে, (i) একই বৃত্তের সর্বসম জ্যা-গুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী এবং (ii) একই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাগুলি পরস্পর সর্বসম।

(i) স্বীকার : ABDC বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু O এবং জ্যা $\overline{AB} \cong$ জ্যা $\overline{CD}$.

এখানে $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ এবং $\overline{ON} \perp \overline{CD}$.



প্রামাণ্য বিষয় : OM = ON.

অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে $\overline{OM} \perp \overline{AB}$;

$\therefore$ $AM = \frac{1}{2}.AB$.

আবার, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$;

$\therefore$ $CN = \frac{1}{2}.CD$.

কিন্তু, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. (স্বীকার) $\therefore$ $\overline{AM} \cong \overline{CN}$.

এখন $\triangle AOM$ এবং $\triangle CON$-এর মধ্যে,

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$. (ব্যাসার্ধ), $\angle AMO \cong \angle CNO$ (সমকোণ) এবং $\overline{AM} \cong \overline{CN}$.

$\therefore$ $\triangle AOM \cong \triangle CON$.

$\therefore$ $\overline{OM} \cong \overline{ON}$; $\therefore$ OM = ON.

(ii) স্বীকার : ABDC বৃত্তের $\overline{AB}$ এবং CD জ্যাদ্বয়ের উপর কেন্দ্রবিন্দু O হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$.

এখানে OM = ON [উপরের চিত্রটি দেখ।]

প্রামাণ্য বিষয় : জ্যা $\overline{AB} \cong$ জ্যা $\overline{CD}$.

অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে OM = ON ; $\therefore$ $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

এখন $\triangle AOM$ এবং $\triangle CON$-এর মধ্যে,

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$, $\angle AMO \cong \angle CNO$ (সমকোণ) এবং $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

$\therefore$ $\triangle AOM \cong \triangle CON$. $\therefore$ $\overline{AM} \cong \overline{CN}$.

AM = CN.

2AM = 2CN ($\because$ $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ এবং $\overline{ON} \perp \overline{CD}$)

$\therefore$ AB = CD.

$\therefore$ জ্যা $\overline{AB} \cong$ জ্যা $\overline{CD}$.

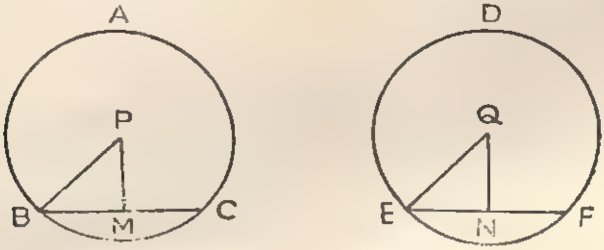
9. প্রমাণ কর যে,

(i) সর্বসম বৃত্তের সর্বসম জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী এবং

(ii) সর্বসম বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাসমূহ পরস্পর সর্বসম।

(i) **স্বীকার:** ABC এবং DEF বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q. এখানে ব্যাসার্ধ $\overline{PB} \cong$ ব্যাসার্ধ $\overline{QE}$ এবং জ্যা $\overline{BC} \cong$ জ্যা $\overline{EF}$, P এবং Q বিন্দু হইতে $\overline{BC}$ এবং $\overline{EF}$-এর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে $\overline{PM}$ এবং $\overline{QN}$.

প্রামাণ্য বিষয়: $PM = QN$.



প্রমাণ: এখানে $\overline{PM} \perp \overline{BC}$; $\therefore \quad BM = \frac{1}{2} BC$.

আবার $\overline{QN} \perp \overline{EF}$; $\therefore \quad EN = \frac{1}{2} EF$.

কিন্তু জ্যা $\overline{BC} \cong$ জ্যা $\overline{EF}$; $\therefore \quad \overline{BM} \cong \overline{EN}$.

এখন $\triangle PBM$ এবং $\triangle QEN$-এর মধ্যে,

$\overline{PB} \cong \overline{QE}$, $\angle BMP \cong \angle QNE$ (সমকোণ) এবং $\overline{BM} \cong \overline{EN}$.

$\therefore \quad \triangle PBM \cong \triangle QEN$; $\quad \therefore \quad \overline{PM} \cong \overline{QN}$;

$\therefore \quad PM = QN$.

(ii) **স্বীকার:** ABC এবং DEF বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু P এবং Q; এখানে ব্যাসার্ধ $\overline{PB} \cong$ ব্যাসার্ধ $\overline{QE}$; P এবং Q বিন্দু হইতে $\overline{BC}$ এবং $\overline{EF}$ জ্যা-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ এবং $\overline{QN}$ লম্ব; $PM = QN$। [উপরের চিত্রটি দেখ]

প্রামাণ্য বিষয়: জ্যা $\overline{BC} \cong$ জ্যা $\overline{EF}$.

প্রমাণ: $\triangle PBM$ এবং $\triangle QEN$-এর মধ্যে,

$\overline{PB} \cong \overline{QE}$, $\angle BMP \cong \angle ENQ$ (সমকোণ) এবং $\overline{PM} \cong \overline{QN}$

$\therefore \quad \triangle PBM \cong \triangle QEN$;

$\therefore \quad \overline{BM} \cong \overline{EN}$; $\quad \therefore \quad BM = EN$

এখন $\overline{PM} \perp \overline{BC}$ এবং $\overline{QN} \perp \overline{EF}$ বলিয়া,

$BM = \frac{1}{2}.BC$ এবং $EN = \frac{1}{2}.EF$.

$\therefore \quad \frac{1}{2}.BC = \frac{1}{2}.EF \; ; \quad \therefore \quad BC = EF$

$\therefore$ জ্যা $\overline{BC} \cong$ জ্যা $\overline{EF}$.

10. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O ; উহার $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ জ্যা-দ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $\angle APO \cong \angle DPO$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, জ্যা $\overline{AB} \cong$ জ্যা $\overline{CD}$.

11. কোন বৃত্তের দুইটি সর্বসম জ্যা $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$. উহারা পরস্পরকে বৃত্তের অন্তঃস্থ O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $OA > OB$ এবং $OD > OC$ হয়, তবে দেখাও যে $\overline{OA} \cong \overline{CD}$ এবং $\overline{CB} \cong \overline{OC}$

12. কোন বৃত্তের দুইটি সর্বসম জ্যা $\overline{PQ}$ এবং $\overline{RS}$; $\overline{PQ}$ এবং $\overline{RS}$-কে বর্ধিত করাতে উহারা পরস্পরকে M বিন্দুতে ছেদ করল। দেখাও যে, $\overline{QM}$ এবং $\overline{SM}$ রেখাংশদ্বয় সর্বসম।

13. কোন বৃত্তের $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ জ্যা দুইটি পরস্পর সর্বসম। দেখাও যে, $\angle BAC$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকটি বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দুগামী হইবে।

স্বীকার : ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং উহার $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ জ্যা-দ্বয় পরস্পর সর্বসম।

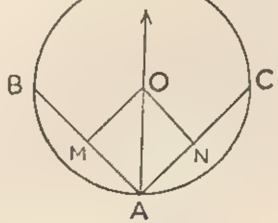
প্রামাণ্য বিষয় : $\overrightarrow{AO}$, $\angle BAC$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ টানা হইল।

প্রমাণ : এখানে $\overline{OM} \perp \overline{AB}$; $\therefore \quad AM = \frac{1}{2}.AB$.

আবার $\overline{ON} \perp \overline{AC}$; $\therefore \quad AN = \frac{1}{2}.AC$.

কিন্তু $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\therefore \quad \overline{AM} \cong \overline{AN}$.



$\therefore \quad \triangle AOM$ এবং $\triangle AON$-এর মধ্যে,

$\overline{AM} \cong \overline{AN}$, $\angle AMO \cong \angle ANO$ (সমকোণ)

এবং $\overline{OA} \cong \overline{OA}$.

$\therefore \quad \triangle AOM \cong \triangle AON$

$\therefore \quad \angle OAM \cong \angle OAN$.

$\therefore \quad \overrightarrow{OA}$, $\angle BAC$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

14. দুইটি সর্বসম বৃত্ত পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি A বিন্দুগামী সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\overline{BP}$ জ্যা $\cong$ $\overline{BQ}$ জ্যা।

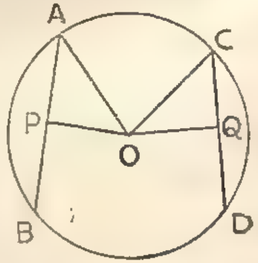
15. বৃত্তের দুইটি জ্যা অসমান হইলে উহাদের মধ্যে যে জ্যা-টি কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী সেইটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

স্বীকার ঃ ABDC বৃত্তের কেন্দ্র O ; $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ দুইটি জ্যা। $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, $\overline{OQ} \perp \overline{CD}$ এবং $OP < OQ$.

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $AB > CD$.

অঙ্কন ঃ $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ AOP সমকোণী ত্রিভুজে, $OA^2 = OP^2 + AP^2$.



আবার COQ সমকোণী ত্রিভুজে,

$OC^2 = OQ^2 + CQ^2$

$\therefore \quad OP^2 + AP^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad \cdots \quad$ (i)

$(\because \quad \overline{OA} \cong \overline{OC})$

এখন $OP < OQ$; $\quad OP^2 < OQ^2$

$\therefore$ (i) হইতে, $AP^2 > CQ^2 \quad \cdots \quad$ (ii)

আবার $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ এবং $\overline{OQ} \perp \overline{CD}$ বলিয়া, $AB = 2.\ AP$ এবং $CD = 2.\ CQ$

$\therefore$ (ii) হইতে, $4\ AP^2 > 4\ CQ^2$

$\therefore \quad (2\ AP)^2 > (2\ CQ)^2$

$\therefore \quad AB^2 > CD^2$; $\quad \therefore \quad AB > CD$

16. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী হইবে।

17. কোন সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে A, B, C এবং D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ রেখাংশদ্বয় পরস্পর সর্বসম।

18. 10 সে.মি. ব্যাস-যুক্ত বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি এবং 8 সে.মি। যদি জ্যা-দ্বয় কেন্দ্রের (i) একই পার্শ্বে, (ii) কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তবে উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Ans. (i) 1 সে.মি ; (ii) 7 সে.মি]

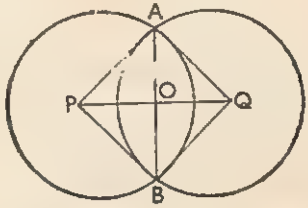
19. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উহাদের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে প্রমাণ কর।

স্বীকার ঃ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু দুইটি যথাক্রমে P এবং Q ; $\overline{AB}$ উহাদের সাধারণ জ্যা। $\overline{PQ}$ রেখাংশটি $\overline{AB}$-কে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\angle AOP$ ও $\angle BOP$ কোণ দুইটির প্রত্যেকে সমকোণ এবং $OA = OB$.

প্রমাণ ঃ $\triangle APQ$ এবং $\triangle BPQ$-এর মধ্যে

$\overline{AP} \cong \overline{BP}$, $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ এবং $\overline{PQ}$ সাধারণ বাহু।



$\therefore$ $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$.

$\therefore$ $\angle APQ \cong \angle BPQ$.

আবার $\triangle APO$ এবং $\triangle BPO$-এর মধ্যে

$\overline{AP} \cong \overline{BP}$, $\overline{OP}$ সাধারণ এবং

$\angle APO \cong \angle BPO$.

$\triangle APO \cong \triangle BPO$.

$\therefore$ $OA = OB$ এবং $\angle AOP \cong \angle BOP$

কিন্তু $\angle AOP$ এবং $\angle BOP$ পরস্পর সম্পূরক বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ।

20. কোন বৃত্তের 48 সে মি দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা বৃত্তটির ব্যাসকে সমকোণে ছেদ করে। যদি ব্যাসের ছেদিতাংশ দুইটির মধ্যে বৃহত্তর অংশটির দৈর্ঘ্য 32 সে.মি. হয়, তবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [Ans. 25 সে.মি.]

ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ঃ কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হইলে বৃত্তটিকে ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত** বলে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধকে ত্রিভুজের **পরিব্যাসার্ধ** এবং উহার কেন্দ্রবিন্দুকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** বলা হয়।

কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু। উক্ত বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি যদি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়া গমন করে তবে ঐ বৃত্তটি ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত হইবে। নিম্নে নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কনপ্রণালী দেখানো হইল।

সম্পাদ্য 1

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

[To construct a circle about a given triangle.]

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। এখানে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

8. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার সমষ্টি 36 সে. মি.। উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 সে. মি. হইলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হইবে?

9. ধাতুনির্মিত তিনটি নিরেট ঘনকের প্রান্তিকীগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 ইঞ্চি। উহাদের গলাইয়া একটি নিরেট ঘনক তৈয়ারী করা হইল। নূতন ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হইবে?

10. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 80 সে. মি., প্রস্থ 75 সে. মি. এবং উচ্চতা 36 সে. মি.। উহার সমান আয়তনবিশিষ্ট ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11 12 মিটার দীর্ঘ এবং 9 মিটার বিস্তৃত কোন আয়তাকার জমির বাহিরে 0·2 মিটার চওড়া এবং 1·5 মিটার উচ্চ প্রাচীর করিবার জন্যে 20 সে. মি. $\times$ 10·7 সে.মি $\times$ 5 সে.মি. আয়তনের কতগুলি ইটের প্রয়োজন হইবে?

12. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 300 গজ এবং প্রস্থ 150 গজ। একটি নলদ্বারা প্রতি সেকেণ্ডে শূন্য চৌবাচ্চাটিতে $12\frac{1}{2}$ ঘনফুট জল পড়িলে কত সময়ে ঐ চৌবাচ্চার জলতল $2\frac{1}{2}$ ফুট উপরে উঠিবে?

13. 25 ফুট 5 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 12 ফুট 10 ইঞ্চি বিস্তৃত কোন চৌবাচ্চা হইতে কত গ্যালন জল তুলিয়া লইলে উহার জলতল 3 ফুট নীচে নামিয়া যাইবে? [1 ঘনফুট জলের ওজন = 1000 আউন্স এবং 1 গ্যালন = 10 পাউণ্ড]

14. একটি সমকোণী চৌপলের মাত্রাগুলির অনুপাত 5 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্র তলের পরিমাণ 558 বর্গ সে. মি.। চৌপলটির মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

15. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উহার উচ্চতা 7 মিটার। চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 396 বর্গমিটার হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত?

16. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং উহাতে 2304 ঘনফুট বায়ু ধরে। উহার মেঝেতে প্রতি বর্গফুট 5·25 টাকা দরে কার্পেট বসাইতে 1008 টাকা ব্যয় হইলে ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা কত হইবে?

17. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের 3 গুণ এবং উচ্চতার 5 গুণ। চৌপলটির ঘনফল 14400 ঘন সে. মি. হইলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. 1 ফুট 8 ইঞ্চি দীর্ঘ, 1 ফুট 3 ইঞ্চি বিস্তৃত এবং 9 ইঞ্চি উচ্চ একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্স $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী করিতে হইলে কত ঘনফুট কাঠের প্রয়োজন হইবে?

19. একটি ঢাকনাবিহীন বাক্স 1 ইঞ্চি পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী। উহার বাহিরের দৈর্ঘ্য 2 ফুট 10 ইঞ্চি, প্রস্থ 2 ফুট 5 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 1 ফুট 7 ইঞ্চি হইলে বাক্সটির

ভিতরের আয়তন নির্ণয় কর। প্রতি ঘনফুট কাঠের দাম 54 টাকা হইলে বাক্সটির জন্যে কত টাকার কাঠ লাগিয়াছিল ?

20. একটি ঢাকনাযুক্ত বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য 12 সে. মি., প্রস্থ 10 সে. মি. এবং উচ্চতা 8 সে. মি.। উহার ভিতরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 376 বর্গ সে. মি.। বাক্সটির দেওয়ালগুলি সমভাবে পুরু হইলে উহার ভিতরের আয়তন কত ?

21. 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত এবং $3\frac{2}{3}$ ফুট গভীর কোন চৌবাচ্চায় 30 ঘনফুট জল আছে। চৌবাচ্চাটির মধ্যে 9 ইঞ্চি $\times$ 3 ইঞ্চি $\times$ $2\frac{2}{3}$ ইঞ্চি মাপের x সংখ্যক ইট ফেলাতে উহার জল চৌবাচ্চাটিকে কানায় কানায় পূর্ণ করিল। যদি প্রত্যেকটি ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল চুষিয়া লইয়া থাকে তবে x-এর মান নির্ণয় কর।

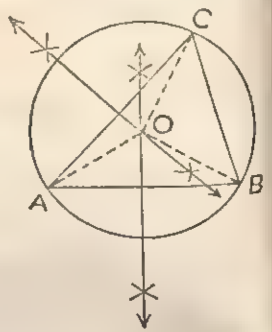
22. একটি আয়তকার জলাধারের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উহার গভীরতা $10\frac{1}{2}$ ফুট। জলাধারটিতে $37\frac{1}{2}$ টন জল ধরে। 1 ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে জলাধারটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত হইবে ?

23. একটি কাঠের বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য 18 সে. মি., প্রস্থ 10 সে মি এবং উচ্চতা 6 সে. মি.। উহা $\frac{1}{2}$ সে. মি. পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী। খালি অবস্থায় উহার ওজন $\frac{15}{4}$ কিলোগ্রাম এবং বালিপূর্ণ অবস্থায় ওজন 25 কিলোগ্রাম। সমপরিমাণ কাঠ ও বালির ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর।

24. একটি সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 192 বর্গ সে. মি., আয়তন 144 ঘন সে. মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 13 সে. মি.। চৌপলটির মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

চোঙ (Cylinder) : কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে অক্ষটির চারিদিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহাকে **চোঙ** (Cylinder) বলে। আয়তক্ষেত্রের যে বাহুটিকে অক্ষ হিসাবে গ্রহণ করা হয় তাহার সন্নিহিত বাহু দুইটির পূর্ণ আবর্তনে উৎপন্ন বৃত্তাকার তল দুইটিকে চোঙের **প্রান্ততল** বা **ভূমি** (Base) বলে। ঐ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের যে কোনটির দৈর্ঘ্যকে চোঙটির **ভূমির ব্যাসার্ধ** (Radius of the base) বলা হয়। অপরপক্ষে আয়তক্ষেত্রটির যে বাহুটিকে অক্ষ ধরা হইয়াছে তাহার সমান্তরাল বাহুটির পূর্ণ আবর্তনে যে তলের সৃষ্টি হয় তাহাকে চোঙটির **বক্রতল** (Curved surface) বলে।

অঙ্কন : $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় অঙ্কন করা হইল। মনে কর, উক্ত লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। C-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি A, B এবং C-এর মধ্য দিয়া গমন করিল।



তাহা হইলে উক্ত বৃত্তই নির্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

এখন O বিন্দু, AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া উহার উপরিস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুই A এবং B হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

$\therefore$ OA = OB $\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; অনুরূপে $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

$\therefore$ O-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি A, B এবং C বিন্দুগামী।

মন্তব্য : সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ত্রিভুজটির অন্তঃস্থবিন্দু, স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজটির বহিঃস্থ বিন্দু এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজটির অতিভুজের মধ্যবিন্দু হইবে।

অনুশীলনী 4

1. $\triangle$ABC-এর $\angle$A সমকোণ, AB = 4 সে. মি. এবং AC = 3 সে মি. A, B, C বিন্দুগামী বৃত্ত অঙ্কন কর।

2. OQR ত্রিভুজের $\overline{QR}$ এবং $\overline{RP}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 ইঞ্চি এবং 2·5 ইঞ্চি। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

3. ABC ত্রিভুজের, AB = 5·5 সে. মি. এবং BC = 4·5 সে মি.। এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা হইতে A, B এবং C-এর দূরত্ব সমান হয়।

4. একটি ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় যথাক্রমে 60° এবং 45° ; ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

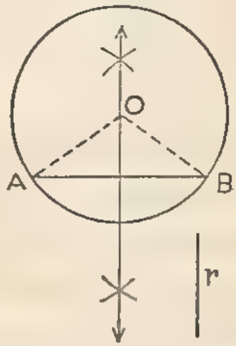
5. DEF ত্রিভুজের $\angle$D-এর পরিমাপ = 135° ; ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

6. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ লইয়া এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া গমন করে। কখন বৃত্তটি অঙ্কন করা সম্ভব নয়

মনে কর, A এবং B বিন্দু দিয়া r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{AB}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হইল। এখন A-কে কেন্দ্র করি-

r ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ $\overline{AB}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটিকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি নির্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।



প্রমাণ : O বিন্দু $\overline{AB}$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া $\overline{OA} \cong \overline{CB}$.

$\therefore$ O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি অবশ্যই B বিন্দু দিয়া যাইবে।

যদি r-এর দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}$ AB অপেক্ষা কম হয় তবে বৃত্তের কেন্দ্র পাওয়া যাইবে না। এক্ষেত্রে বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব নয়।

7. $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য 4.8 সে. মি.। A এবং B বিন্দু দিয়া এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহার ব্যাসার্ধ 3 সে. মি. হয়। বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু হইতে $\overline{AB}$-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

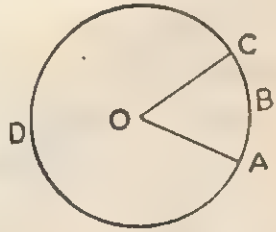
8. 5 সে.মি. ব্যাসার্দ্ধ যুক্ত বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

2.3. কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তের চাপ এবং পরিধি।

মনে কর, O কেন্দ্রিক বৃত্তের উপরিস্থিত A এবং C দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এখন যে-সকল কোণের শীর্ষবিন্দু O, তাহাদের প্রত্যেককে উক্ত বৃত্তের **কেন্দ্রস্থ কোণ** বলা হয়। চিত্রে $\angle AOC$ একটি কেন্দ্রস্থ কোণ।

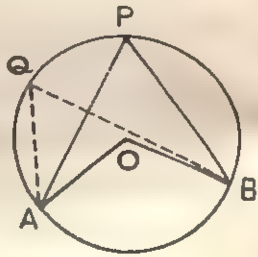
এখন O কেন্দ্রিক বৃত্তের উপরিস্থিত A এবং C এরূপ দুইটি বিন্দু যাহারা বৃত্তটির ব্যাসের প্রান্তবিন্দু নয়। এক্ষেত্রে বৃত্তটির **উপচাপ** $\overparen{AC}$ বলিতে A, C বিন্দু এবং $\angle AOC$-এর অন্তঃস্থ কিন্তু বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুগুলির সমন্বয়কে বুঝান হয়।

ইহাছাড়া A, C বিন্দু সহ বৃত্তটির অবশিষ্ট বিন্দুগুলির সমন্বয়কে উহার **অধিচাপ** $\overparen{AC}$ বলা হয়। যদি A এবং C বৃত্তটির ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হয়, তবে বলা হইবে যে $\overline{AC}$ ব্যাস বৃত্তে দুইটি চাপ গঠন করিয়াছে। ইহাদের প্রত্যেকটিকে **অর্ধবৃত্ত** বলে।



মনে কর, B বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু, যাহা A এবং C হইতে ভিন্ন। এখন যদি B বিন্দু উপচাপ $\overparen{AC}$-এর উপরে অবস্থিত হয় তবে উপচাপ $\overparen{AC}$-এর পরিবর্তে

চাপ $\overparen{ABC}$ লেখা হইবে। আবার A ও C বিন্দু ভিন্ন বৃত্তের উপরিস্থিত অপর একটি বিন্দু D অধিচাপ $\overparen{AC}$-এর উপর অবস্থিত হয় তবে অধিচাপ $\overparen{AC}$-এর পরিবর্তেও কেবলমাত্র চাপ $\overparen{ADC}$ লেখা হইবে। এক্ষেত্রে চাপ $\overparen{ABC}$ এবং চাপ $\overparen{ADC}$-এর একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী চাপ** বলে। প্রকৃতপক্ষে চাপ $\overparen{ADC}$ এবং চাপ $\overparen{ABC}$-এর সমন্বয়ে বৃত্তটি গঠিত। চাপ $\overparen{ADC}$ এবং চাপ $\overparen{ABC}$-এর সমন্বয়কে বৃত্তটির **পরিধি** (Circumference) বলে।



O কেন্দ্রিক বৃত্তের উপচাপ $\overparen{AB}$। বৃত্তের উপর অবস্থিত P এরূপ একটি বিন্দু যাহা উপচাপটির অন্তর্ভুক্ত নয়। এখন ∠AOB এবং ∠APB-কে যথাক্রমে উক্ত উপচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ এবং পরিধিস্থ কোণ বলা হয়। একই চাপের দ্বারা উৎপন্ন পরিধিস্থ কোণগুলিকে একই **বৃত্তাংশস্থ কোণ** বলা হয়। যথা, ∠APB এবং ∠AQB একই বৃত্তাংশস্থ কোণ।

উপপাদ্য 3

বৃত্তের যে-কোন চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ একই চাপ দ্বারা পরিধির অবশিষ্ট অংশের যে-কোন বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের দ্বিগুণ।

[The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.]

স্বীকার ঃ PABC বৃত্তের কেন্দ্র O ; উক্ত বৃত্তের $\overparen{ABC}$ চাপের অনুবন্ধী চাপ $\overparen{CPA}$. এখানে $\overparen{ABC}$ চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ AOC এবং পরিধিস্থ কোণ APC.

প্রামাণ্য বিষয় ঃ কেন্দ্রস্থ ∠AOC-এর পরিমাপ = 2 পরিধিস্থ ∠APC-এর পরিমাপ।

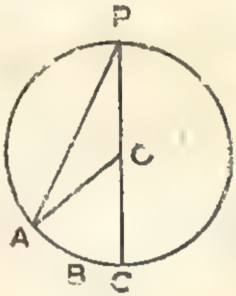
প্রমাণ ঃ চিত্র (1) ঃ এক্ষেত্রে P এবং C বিন্দুদ্বয় P বিন্দুগামী ব্যাসের প্রান্তবিন্দু। এখন △AOP-এর $\overline{OA} \cong \overline{OP}$ (ব্যাসার্ধ) ; ∠APO ≅ ∠OAP. আবার বহিঃস্থ ∠AOC-এর পরিমাপ

= অন্তঃস্থ ∠APO-এর পরিমাপ + অন্তঃস্থ ∠OAP-এর পরিমাপ

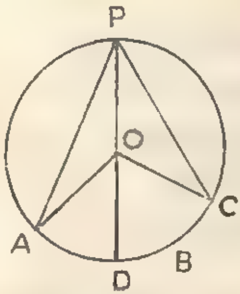
= 2 ∠APC-এর পরিমাপ (∵ ∠APO ≅ ∠OAP)

∴ কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$-এর পরিমাপ$=2$ পরিধিস্থ $\angle APC$-এর পরিমাপ।

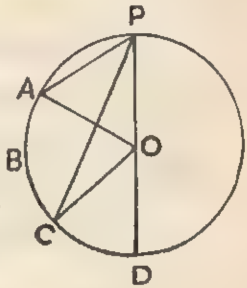
চিত্র (2) : এক্ষেত্রে A এবং C বিন্দুদ্বয় P বিন্দুগামী ব্যাস $\overline{PD}$-এর বিপরীত পার্শে অবস্থিত।



চিত্র (1)



চিত্র (2)



চিত্র (3)

এখন $\overset{\frown}{ADBC}$ চাপের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$-এর পরিমাপ

$=$কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$-এর পরিমাপ$+$কেন্দ্রস্থ $\angle DOC$-এর পরিমাপ

$=2$ পরিধিস্থ $\angle APD$-এর পরিমাপ$+2$ পরিধিস্থ $\angle DPC$-এর পরিমাপ

[চিত্র (1) অনুসারে]

$=2$ [পরিধিস্থ $\angle APD$-এর পরিমাপ$+$পরিধিস্থ $\angle DPC$-এর পরিমাপ]

$=2$ পরিধিস্থ $\angle APC$-এর পরিমাপ।

চিত্র (3) : A এবং C বিন্দুদ্বয় P বিন্দুগামী ব্যাস $\overline{PD}$-এর একই পার্শে অবস্থিত।

এখন $\overset{\frown}{ABCD}$ চাপের $\overset{\frown}{ABC}$ অংশের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$-এর পরিমাপ

$=$কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$-এর পরিমাপ$-$কেন্দ্রস্থ $\angle COD$-এর পরিমাপ

$=2$ পরিধিস্থ $\angle APD$-এর পরিমাপ-2 পরিধিস্থ $\angle CPD$-এর পরিমাপ

[(1) অনুসারে]

$=2$ [পরিধিস্থ $\angle APD$-এর পরিমাপ—পরিধিস্থ $\angle CPD$-এর পরিমাপ]

$=2$ পরিধিস্থ $\angle APC$-এর পরিমাপ।

উপপাদ্য 4

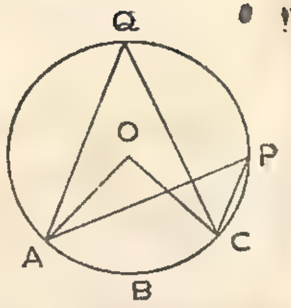
কোন বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম।

[Angles in the same segment of a circle are congruent]

স্বীকার : ABCPQ বৃত্তের কেন্দ্র O ; উহার $\overset{\frown}{AQPC}$ বৃত্তাংশস্থ কোণ APC এবং AQC.

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle APC \cong \angle AQC$

অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : $\widehat{ABC}$ চাপের উপর অবস্থিত, পরিধিস্থ $\angle APC$-এর পরিমাপ

$= \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$-এর পরিমাপ।

= পরিধিস্থ $\angle AQC$-এর পরিমাপ।

$\therefore \quad \angle APC \cong \angle AQC.$

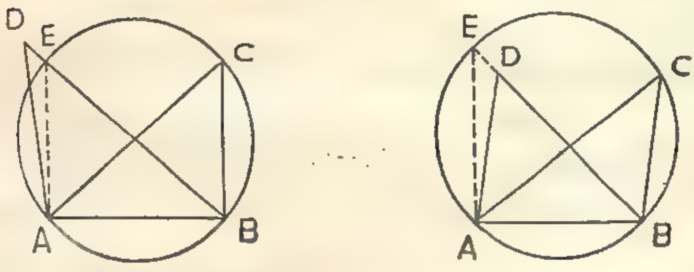
উপপাদ্য 5

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুইটি বিন্দুতে যে-দুইটি কোণ উৎপন্ন করে যদি তাহারা সর্বসম হয়, তবে ঐ চারিটি বিন্দুই সমবৃত্ত হইবে।

[If the line of segment joining two points subtends congruent angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.]

স্বীকার : $\overline{AB}$ একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ ; C এবং D বিন্দু দুইটি $\overline{AB}$-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। এখানে $\angle ACB \cong \angle ADB$.

প্রামাণ্য বিষয় : A, B, C এবং D বিন্দু চারিটি সমবৃত্তস্থ।



প্রমাণ : A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। যদি এই বৃত্তটি D দিয়া না যায়, তবে মনে কর, উহা BD-কে উহার উপরিস্থিত অথবা বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত E বিন্দুতে ছেদ করে। EA অঙ্কন করা হইল।

এখন $\angle AEB \cong \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া)।

কিন্তু $\angle ADB \cong \angle ACB$ (স্বীকার).

$\therefore$ $\angle AEB \cong \angle ADB$.

এখন E বিন্দু $\overline{BD}$-এর উপর অবস্থিত হইলে

(অন্তঃ $\angle ADE$-এর পরিমাপ)<(বহিঃ $\angle AEB$-এর পরিমাপ)।

আবার E বিন্দু $\overline{BD}$-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত হইলে,

(অন্তঃ $\angle AED$-এর পরিমাপ)<(বহিঃ $\angle ADB$-এর পরিমাপ)।

$\therefore$ E এবং D বিন্দু ভিন্ন হইতে পারে না।

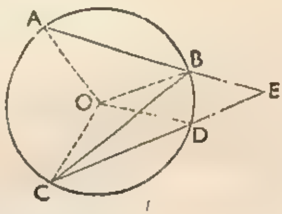
$\therefore$ A, B এবং C বিন্দুগামী বৃত্তটি অবশ্যই D বিন্দু দিয়া গমন করিবে।

অনুশীলনী 4

1. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O ; $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ এবং $\angle BAC$-এর পরিমাপ 32° হইলে $\angle AOB$ এবং $\angle BOC$-এর পরিমাপ কত হইবে ?

2. $\triangle ABC$-এর পরিকেন্দ্র O হইলে দেখাও যে $\angle BAC$ এবং $\angle OCB$-এর পরিমাপের সমষ্টি এক সমকোণ।

3. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং উহার $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা-দ্বয় বৃত্তটির বহিঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC$ এবং $\angle DOB$-এর মানের অন্তরফল $\angle AEC$-এর মানের দ্বিগুণ।



স্বীকার : ABDC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং উহার $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা-দ্বয় বৃত্তটির বহিঃস্থ E বিন্দুকে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : ($\angle AOC$-এর পরিমাপ − $\angle DOB$-এর পরিমাপ) = 2($\angle AEC$-এর পরিমাপ)।

অঙ্কন : $\overline{BC}$, $\overline{OA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CC}$ এবং $\overline{CD}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে $\angle ABC$-এর পরিমাপ $=\frac{1}{2}$($\angle AOC$-এর পরিমাপ) ;

এবং $\angle DCB$-এর পরিমাপ $=\frac{1}{2}$($\angle DOB$-এর পরিমাপ)।

এখন $\angle AEC$ এর পরিমাপ $=$ $\angle ABC$-এর পরিমাপ − $\angle ECB$-এর পরিমাপ

$=\frac{1}{2}$($\angle AOC$-এর পরিমাপ) $-\frac{1}{2}$($\angle DOB$-এর পরিমাপ)।

$=\frac{1}{2}$($\angle AOC$-এর পরিমাপ − $\angle DOB$-এর পরিমাপ)।

4. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সর্বসম বাহু দুইটির যে-কোন একটিকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ত্রিভুজটির ভূমির মধ্যবিন্দুগামী হইবে।

5. কোন বৃত্তের $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা-দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, প্রমাণ কর যে, চাপ $\widehat{AC}$ এবং চাপ $\widehat{BD}$ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের পরিমাপের সমষ্টি $\angle AEC$-এর দ্বিগুণ।

6. কোন বৃত্তের $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ ব্যাসার্ধ দুইটি পরস্পর লম্ব। A ও B বিন্দু হইতে $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ জ্যা-দ্বয় অঙ্কন করা হইল। যদি $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ হয়, তবে দেখাও যে $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

7. ABCD বৃত্তে $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ দুইটি সমান্তরাল জ্যা ; $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে,

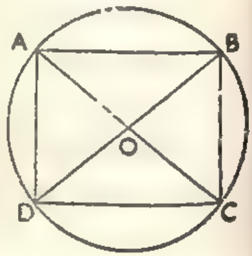
(i) $PD = PC$ এবং (ii) $\angle APD$-এর পরিমাপ $= 2\angle ABP$-এর পরিমাপ।

2.4. বৃত্তস্থ সামান্তরিক : কোন সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলি বৃত্তের উপর অবস্থিত হইলে তাহাকে বৃত্তস্থ সামান্তরিক বলে।

8. প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।

স্বীকার : ABCD সামান্তরিকটি বৃত্তস্থ ; উহার $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O.

প্রামাণ্য বিষয় : O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু।



প্রমাণ : এখানে $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$;

$\therefore$ $\angle CAB \cong$ একান্তর $\angle ACD$.

আবার $\angle ACD \cong \angle ABD$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)।

$\therefore$ $\angle CAB \cong \angle ABD$.

$\therefore$ ΔAOB-এর $\angle OAB \cong \angle OBA$.

$\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

কিন্তু $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ এবং $\overline{OB} \cong \overline{OD}$.

$\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$.

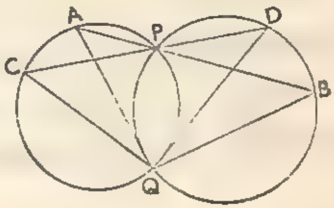
$\therefore$ O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু।

9. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; যদি A এবং B বিন্দুগামী কোন বৃত্ত $\overline{AC}$ এবং $\overline{BC}$-কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\overline{PQ} \cong \overline{QC}$.

10. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটি বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\angle AQC \cong \angle BQD.$$

স্বীকার : বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটি বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ।



প্রামাণ্য বিষয় : $\angle AQC \cong \angle BQD$

অঙ্কন : $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CQ}$, $\overline{DQ}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলিয়া, $\angle AQC \cong \angle APC$.

অনুরূপে, $\angle BQD \cong \angle BPD$.

কিন্তু $\angle APC \cong \angle BPD$ (বিপ্রতীপ কোণ)।

$\therefore \quad \angle AQC \cong \angle BQD$.

11. দেখাও যে একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি সাধারণ বিন্দুগামী হইবে।

12. দুইটি বৃত্তের প্রত্যেকটি অপরটির কেন্দ্রবিন্দুগামী এবং উহারা পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle BPQ$ সমবাহু।

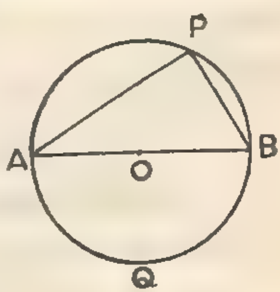
2.5. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

মনে কর, O কেন্দ্রিক বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$, এবং P উক্ত বৃত্তের উপরিস্থিত অপর যে কোন একটি বিন্দু। এখন পরিধিস্থ $\angle APB$-কে **অর্ধবৃত্তস্থ** বা **অর্ধবৃত্তাংশস্থ কোণ** বলে। [উপপাদ্য 6-এর চিত্র দেখ।]

উপপাদ্য 6

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

[The angle in a sami-circle is a right angle].



স্বীকার : PAQB বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাস $\overline{AB}$ এবং $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle APB$ সমকোণ।

প্রমাণ : $\overparen{AQB}$ চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ এবং পরিধিস্থ কোণ যথাক্রমে AOB এবং APB.

$\therefore \quad \angle APB$-এর পরিমাপ $= \frac{1}{2} \angle AOB$-এর পরিমাপ

$= \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ ($\because \angle AOB$ একটি সরলকোণ)

$= 1$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত : সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা সমকৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে।

2.6. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ : কোন চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দু চারিটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হইলে তাহাকে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলে।

উপপাদ্য 7-এর চিত্রে চতুর্ভুজ ABCD-এর কৌণিক বিন্দু চারিটি O কেন্দ্রিক বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া ABCD চতুর্ভুজটিকে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলা হইবে।

উপপাদ্য 7

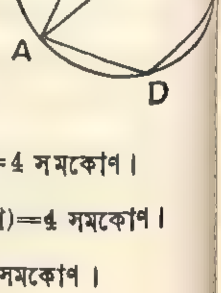
বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

[The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.]

স্বীকার : ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং O উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle$ABC-এর পরিমাপ + $\angle$CDA-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ এবং $\angle$DAB-এর পরিমাপ + $\angle$BCD-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ।

অঙ্কন : $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : এখানে, $\overparen{ADC}$ চাপের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাপ = 2($\angle$ABC-এর পরিমাপ)।

আবার $\overparen{ABC}$ চাপের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাপ = 2($\angle$CDA-এর পরিমাপ)।

কিন্তু $\overparen{ADC}$ চাপের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাপ + $\overparen{ABC}$ চাপের উপরিস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাপ = 4 সমকোণ।

$\therefore$ 2($\angle$ABC-এর পরিমাপ) + 2($\angle$CDA-এর পরিমাপ) = 4 সমকোণ।

$\therefore$ $\angle$ABC-এর পরিমাপ + $\angle$CDA-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ।

অনুরূপে $\overline{OB}$ এবং $\overline{OD}$ অঙ্কন করিয়া দেখান যায় যে,

$\angle$DAB-এর পরিমাপ + $\angle$BCD-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ।

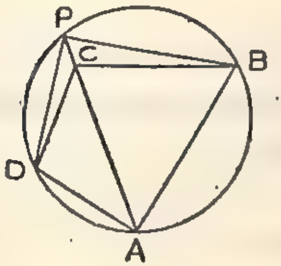
উপপাদ্য ৪

কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইলে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

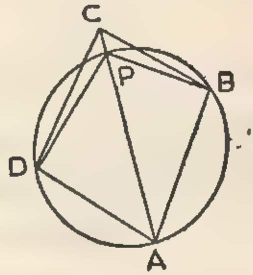
[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary the quadrilateral is cyclic.]

স্বীকার : ABCD চতুর্ভুজের ∠CBA-এর পরিমাপ + ∠ADC-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ।

প্রামাণ্য বিষয় : ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।



চিত্র (1)



চিত্র (2)

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয় তবে মনে কর, A, B এবং D বিন্দুগামী বৃত্তটি $\overline{AC}$ অথবা $\overline{AC}$-এর বর্ধিতাংশকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overline{PB}$ এবং $\overline{PD}$ অঙ্কন করা হইল।

∴ ∠PBA-এর পরিমাপ + ∠ADP-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ।

কিন্তু ∠CBA-এর পরিমাপ + ∠ADC-এর পরিমাপ = 2 সমকোণ, (স্বীকার)

∴ ∠PBA-এর পরিমাপ + ∠ADP-এর পরিমাপ

= ∠CBA-এর পরিমাপ + ∠ADC-এর পরিমাপ।

এখন P বিন্দু $\overline{AC}$-এর উপর অবস্থিত হইলে, [চিত্র (2)]

(∠PBA-এর পরিমাপ) < (∠CBA-এর পরিমাপ) এবং

(∠ADP-এর পরিমাপ) < (∠ADC-এর পরিমাপ)।

আবার P বিন্দু $\overline{AC}$-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত হইলে, [চিত্র (1)]

(∠PBA-এর পরিমাপ) > (∠CBA-এর পরিমাপ) এবং

(∠ADP-এর পরিমাপ) > (ADC-এর পরিমাপ)।

∴ P বিন্দু $\overline{AC}$ অথবা $\overline{AC}$-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত হইলে,

$\angle PBA$ এর পরিমাপ $+$ $\angle ADP$-এর পরিমাপ $\neq$ $\angle CBA$-এর পরিমাপ $+$ $\angle ADC$-এর পরিমাপ।

∴ C এবং P ভিন্ন বিন্দু হইতে পারে না।

∴ C বিন্দু A, B এবং D বিন্দুগামী বৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে।

∴ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

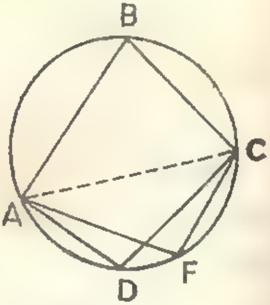
বিকল্প পদ্ধতি ঃ

স্বীকার ঃ ABCD চতুর্ভুজের $\angle CBA$-এর পরিমাপ $+$ $\angle ADC$-এর পরিমাপ $=2$ সমকোণ।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

প্রমাণ ঃ মনে কর, A, B এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি $\overline{AC}$-এর যে পার্শ্বে D আছে সেই পার্শ্বে অপর একটি বিন্দু F দিয়া গমন করে।

∴ AFCB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।



∴ $\angle AFC$-এর পরিমাপ $+$ $\angle CBA$-এর পরিমাপ $=2$ সমকোণ।

কিন্তু $\angle ADC$-এর পরিমাপ $+$ $\angle CBA$-এর পরিমাপ $=2$ সমকোণ, (স্বীকার)।

∴ $\angle AFC$-এর পরিমাপ $=$ $\angle ADC$-এর পরিমাপ।

এখন $\angle AFC$ এবং $\angle ADC$ উভয়েই $\overline{AC}$-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

∴ A, D, F এবং C বৃত্তস্থ। [উপপাদ্য 5 অনুসারে]

∴ A, B, C, D বৃত্তস্থ।

∴ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

অনুশীলনী 5

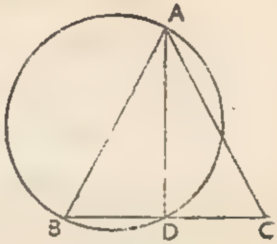
1. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সর্বসম বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় ত্রিভুজটির ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে।

2. $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AB}$-কে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি $\overline{BC}$-কে D বিন্দুতে ছেদ করিলে দেখাও যে $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{AB}$-কে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি $\overline{BC}$-কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

অঙ্কন : $\overline{AD}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : এখানে $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ $\angle ADB$-এর পরিমাপ = 1 সমকোণ।

$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

এখন $\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$-এর মধ্যে,

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (স্বীকার), $\angle ADB \cong \angle CDA$

এবং $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$; $\therefore$ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

3. ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু বা উহার বর্ধিতাংশের উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

4. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P-বিন্দু হইতে উভয় বৃত্তে অঙ্কিত ব্যাস $\overline{PX}$ এবং $\overline{PY}$; দেখাও যে X, Q, Y সমরেখ।

সংজ্ঞা : মনে কর, ABCD বৃত্তের জ্যা $\overline{AC}$ বৃত্তটিতে $\widehat{ABC}$ উপচাপ এবং $\widehat{ADC}$ অধিচাপ উৎপন্ন করিয়াছে। এক্ষেত্রে $\angle ABC$-কে অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ এবং $\angle ADC$-কে অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ বলা হইবে। [5 এর চিত্র দেখ।]

5. দেখাও যে (i) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ এবং (ii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।

স্বীকার : ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O ; উহার $\widehat{ABC}$ বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং $\widehat{ADC}$ বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রামাণ্য বিষয় : (i) $\angle ABC$-এর পরিমাপ $> 90^\circ$,

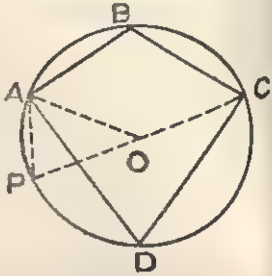
এবং (ii) $\angle ADC$-এর পরিমাপ $< 90^\circ$.

অঙ্কন : $\overline{CP}$ ব্যাস টানা হইল। $\overline{AP}$ এবং $\overline{AO}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle AOP$-এর $\overline{AO} \cong \overline{OP}$ (ব্যাসার্ধ)।

$\therefore$ $\angle APO \cong \angle PAO$

কিন্তু $\angle APO$ এবং $\angle PAO$ কোণদ্বয় $\triangle AOP$-এর দুইটি কোণ বলিয়া $\angle APO$ অথবা $\angle PAO$-এর পরিমাপ 90° অথবা 90° অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।



$\therefore$ $\angle APO$-এর পরিমাপ $<90^\circ$

আবার $\angle APO \cong \angle APC \cong \angle ADC$

(একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)

$\therefore$ $\angle ADC$-এর পরিমাপ $<90^\circ$.

আবার ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ $\angle ABC$-এর পরিমাপ $+$ $\angle ADC$-এর পরিমাপ $= 2$ সমকোণ।

কিন্তু $\angle ADC$-এর পরিমাপ $<90^\circ$; $\therefore$ $\angle ABC$-এর পরিমাপ $>90^\circ$.

7. PQRS চতুর্ভুজের $\overline{PQ}$ বাহুকে X পর্যন্ত বর্ধিত করিলে যদি $\angle XQR \cong \angle PSR$ হয়, তবে PQRS বৃত্তস্থ হইবে।

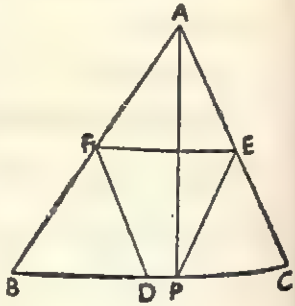
7. বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

8, বৃত্তস্থ রম্বস একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

9. দেখাও যে একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম বৃত্তস্থ।

10. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু D, E, F এবং উহার যে-কোন শীর্ষ বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু P ; প্রমাণ কর যে, D, E, F, P বিন্দু চারিটি বৃত্তস্থ।

স্বীকার : ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে D, E এবং F ; এখানে $\overline{AP} \perp \overline{BC}$.



প্রামাণ্য বিষয় : D, P, E, F বিন্দু চারিটি বৃত্তস্থ।

অঙ্কন : $\overline{FD}$, $\overline{PE}$ এবং $\overline{EF}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : APC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $\overline{AC}$-এর মধ্যবিন্দু E.

$\therefore$ $\overline{PE} \cong \overline{CE}$ এবং $\angle ECP \cong \angle CPE$ ... ... (i)

আবার FDCE একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $\angle DFE \cong \angle ECD$ ... ... (ii)

$\therefore$ $\angle DFE \cong \angle CPE$ [(i) এবং (ii) হইতে]।

এখন $\angle EPD$-এর পরিমাপ $+$ $\angle CPE$-এর পরিমাপ $=2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle EPD$-এর পরিমাপ $+$ $\angle DFE$-এর পরিমাপ $=2$ সমকোণ।

$\therefore$ FDPE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ D, P, E, F বিন্দু চারিটি বৃত্তস্থ।

11. ABC ত্রিভুজের $\angle A$-এর অন্তঃ সমদ্বিখণ্ডক এবং বহিঃ সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ}$ উক্ত বৃত্তের ব্যাস হইবে।

12. কোন বৃত্তীয় চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় উহার পরিবৃত্তকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\overline{PQ}$ উক্ত বৃত্তের একটি ব্যাস।

13. কোন বৃত্তে একটি ট্রাপিজিয়ম অন্তর্লিখিত হইলে প্রমাণ কর যে উহার তির্যক বাহুদ্বয় এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সর্বসম হইবে।

14. বৃত্তস্থ $\triangle ABC$-এর $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ এবং $\overline{AE}$ উক্ত বৃত্তের ব্যাস। প্রমাণ কর যে $\angle BAD \cong \angle EAC$.

15. KLMN বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\overline{KL}$ এবং $\overline{NM}$ বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করাতে উহারা পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, $\triangle PKN$ এবং $\triangle PLM$ সদৃশকোণী।

16. দুইটি বৃত্ত P এবং Q বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে। P এবং Q বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা দুইটি বৃত্ত দুইটির একটিকে A, X বিন্দুতে এবং অপরটিকে B, Y বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, $\overline{AX} \parallel \overline{BY}$.

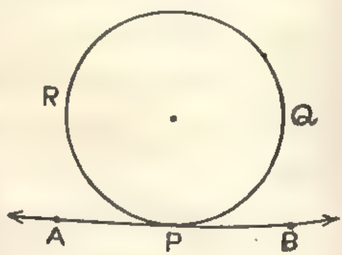
17. ABCD চতুর্ভুজের $AB+CD=AD+BC$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$ বাহুর উপর যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুকে এরূপে লওয়া হইল যে $AP=AS$, $BP=BQ$ এবং $CQ=CR$ হয়। দেখাও যে, P, Q, R, S বিন্দু চারিটি একটি বৃত্তের উপর আছে।

তৃতীয় অধ্যায়

স্পর্শক এবং স্পর্শক বিষয়ক উপপাদ্য

কোন বৃত্তের ধারক সমতলে বৃত্তটির সাপেক্ষে তিন প্রকারের সরলরেখা অঙ্কন করা যাইতে পারে। বৃত্ততলে অঙ্কিত সরলরেখার কোন কিছুই যদি বৃত্তের উপর অবস্থিত না হয় তবে সরলরেখাটিকে বৃত্তের বহিঃস্থ সরলরেখা বলা হইবে। কোন সরলরেখা বৃত্তটিকে ছেদ করিলে অর্থাৎ বৃত্ত এবং সরলরেখার একাধিক সাধারণ বিন্দু থাকিলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ছেদক বলে। ঐ দুই প্রকার সরলরেখা ভিন্ন অপর যে প্রকার সরলরেখা বৃত্ততলে অঙ্কন করা হয় তাহারা বৃত্তের স্পর্শক। এই অধ্যায়ে বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শক সম্বন্ধীয় কয়েকটি সিদ্ধান্তের আলোচনা করা হইবে।

3.1. **স্পর্শক** (Tangent): বৃত্ততলে অবস্থিত কোন সরলরেখার এবং উক্ত বৃত্তের যদি একটি ও কেবলমাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে সরলরেখাটিকে বৃত্তের **স্পর্শক** (Tangent) বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা PQR বৃত্তটির স্পর্শক। উহা বৃত্তটিকে কেবলমাত্র P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। P, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা এবং PQR বৃত্তের সাধারণ বিন্দু। এই বিন্দুটিকে **স্পর্শবিন্দু** (Point of contact) বলা হয়। নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি হইতে প্রমাণ করা যায় যে বৃত্তের প্রতিটি বিন্দুতে একটি করিয়া স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।



বিশেষ উপপাদ্য

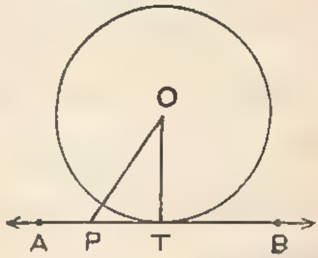
কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের বহিঃস্থ প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বটি বৃত্তটির স্পর্শক হইবে।

[The straight line perpendicular to a radius at its outer end is a tangent to the circle.]

স্বীকার: বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\overline{OT}$ উহার একটি ব্যাসার্ধ। $\overline{OT}$-এর T বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব $\overleftrightarrow{AB}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা বৃত্তটিকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

অঙ্কন : $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর T ভিন্ন অপর যে-কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল। $\overline{OP}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ : এখানে $\triangle POT$-এর $\angle OTP$ সমকোণ।

$\therefore$ ($\angle OTP$-এর পরিমাপ)$>$($\angle OPT$-এর পরিমাপ)

$\therefore \quad OT < OP.$

কিন্তু $\overline{OT}$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ বলিয়া P বিন্দু অবশ্যই বৃত্তটির বহিঃস্থ বিন্দু হইবে অতএব, $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপরিস্থিত বিন্দুগুলির মধ্যে T ভিন্ন অপর কোন বিন্দুই $\overleftrightarrow{AB}$ এবং O-কেন্দ্রিক বৃত্তের সাধারণ বিন্দু হইতে পারে না।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা বৃত্তটির T বিন্দুতে স্পর্শক।

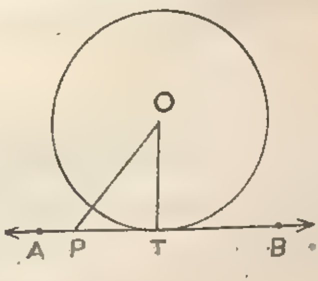
উপপাদ্য 9

বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং উহার ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।

[The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.]

স্বীকার : বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু O ; উহার T বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $\overleftrightarrow{AB}$ এবং ব্যাসার্ধ $\overline{OT}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{AB}$.



প্রমাণ : যদি $\overline{OT}$, $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর লম্ব না হয়, তবে O বিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ এর উপর $\overline{OP}$ লম্ব টানা হইল।

$\therefore$ $\triangle OPT$-এর $\angle OPT$ সমকোণ।

$\therefore$ ($\angle OTP$-এর পরিমাপ) < ($\angle OPT$-এর পরিমাপ)

$\therefore$ $OT > OP$.

এখন OT বৃত্তটির ব্যাসার্ধ বলিয়া P বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের অন্তঃস্থবিন্দু হইবে।

কিন্তু P বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ স্পর্শকের উপরিস্থিত বিন্দু বলিয়া ইহা অসম্ভব।

$$\therefore \overline{OT} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু দিয়া গমন করে।

3.2. স্পর্শক-রেখাংশ ঃ বৃত্তের বহিস্থঃবিন্দু T হইতে বৃত্তে কোন স্পর্শক টানিলে যদি স্পর্শকটি বৃত্তটিকে A-বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে $\overline{TA}$-কে স্পর্শক-রেখাংশ বলা হইবে।

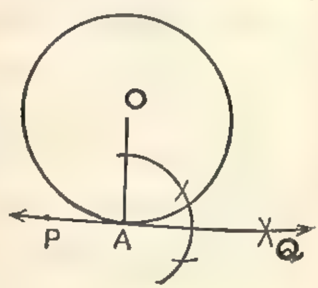
সম্পাদ্য

বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন কর।

[Draw a tangent to a circle at a given point on the circumference.]

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত একটি বিন্দু। A-বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ $\overline{OA}$ অঙ্কন কর। A-বিন্দুতে $\overline{OA}$-এর উপর $\overleftrightarrow{PQ}$ লম্ব টান। তাহা হইলে $\overleftrightarrow{PQ}$-ই বৃত্তটির নির্ণেয় স্পর্শক হইবে।



প্রমাণ ঃ যেহেতু $\overleftrightarrow{PQ}$, A-বিন্দুতে ব্যাসার্ধ $\overline{OA}$-এর উপর লম্ব ; অতএব $\overleftrightarrow{PQ}$, A-বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক।

উপপাদ্য 10

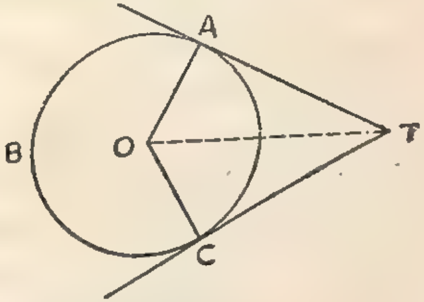
বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার উপর দুইটি স্পর্শক টানিলে, বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত স্পর্শক-রেখাংশ দুইটি এবং উক্ত রেখাংশ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ দুইটি সর্বসম হইবে।

[The segments of two tangents of a circle from an external point

to the points of contact are congruent and they subtend congruent angles at the centre.]

স্বীকার ঃ ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং T উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। T বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি বৃত্তটিকে যথাক্রমে A এবং C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\overline{TA} \cong \overline{TC}$ এবং $\angle TOA \cong \angle TOC$.



অঙ্কন ঃ $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ এবং $\overline{OT}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ এখানে $\overline{OA} \perp \overline{TA}$ এবং $\overline{OC} \perp \overline{TC}$;

∴ $\angle OAT$ সমকোণ এবং $\angle OCT$ সমকোণ।

∴ $\triangle AOT$ এবং $\triangle COT$-এর মধ্যে $\angle OAT \cong \angle OCT$, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ এবং $\overline{OT}$ সাধারণ বাহু।

∴ $\triangle AOT \cong \triangle COT$

∴ $\overline{TA} \cong \overline{TC}$ এবং $\angle TOA \cong \angle TOC$.

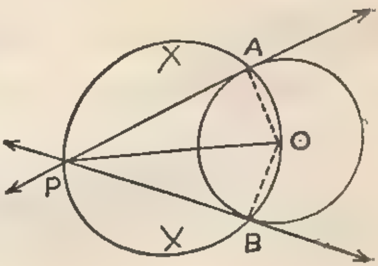
অনুসিদ্ধান্ত ঃ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে মাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উক্ত বৃত্তে স্পর্শক রেখাংশদ্বয় অঙ্কন কর।

[Draw two tangent segments to a circle from a given external point.

O কেন্দ্রস্থ বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। P বিন্দু হইতে উক্ত বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।



অঙ্কন ঃ $\overline{PO}$ অঙ্কন করা হইল। এখন $\overline{PO}$-কে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি O কেন্দ্রস্থ বৃত্তটিকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$ অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে, $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$-ই প্রদত্ত বৃত্তের নির্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ ঃ $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ অঙ্কন করা হইল।

এখন অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া $\angle OAP$ এবং $\angle OBP$—এর প্রত্যেকেই সমকোণ।

$\therefore \quad \overline{OA} \perp \overline{PA}$ এবং $\overline{OB} \perp \overline{PB}$

কিন্তু $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ উভয়েই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore \quad \overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$ বৃত্তের স্পর্শক।

বি. দ্র. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উক্ত বৃত্তে স্পর্শক অঙ্কন করিতে বলিলে উপরের সম্পাদ্যটির কেবলমাত্র $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$-এর চিত্রকে $\overleftrightarrow{PA}$ এবং $\overleftrightarrow{PB}$-এর চিত্রে পরিবর্তিত করিতে হইবে।

3. 3. সংজ্ঞা : দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে—এ কথা তখনই বলা হইবে যদি বৃত্তদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু থাকে। এখন উক্ত বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের যে-কোন একটিতে অঙ্কিত স্পর্শক অপর বৃত্তটিরও স্পর্শক হইবে। পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে এরূপ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দুদ্বয় যদি বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শকটির একই পার্শে অবস্থিত হয় তবে বলিতে হইবে যে, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্থ ভাবে স্পর্শ করিয়াছে [নীচের উপপাদ্যটি চিত্র (ii) দেখ]। কিন্তু উহাদের কেন্দ্র-বিন্দুদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকটির বিপরীত পার্শে অবস্থিত হইলে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে বলা হইবে [নীচের উপপাদ্যটির চিত্র (i) দেখ]।

উপপাদ্য 11

দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে তাহাদের কেন্দ্র দুইটি স্পর্শ বিন্দুর সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

[[If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.]

স্বীকার : A এবং B বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু। বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : A, T, B বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

অঙ্কন : বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PQ}$ টানা হইল। $\overline{TA}$ এবং $\overline{TB}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং স্পর্শ বিন্দু T ; $\overline{AT}$ এবং $\overline{BT}$ যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore \quad \overline{AT} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overline{BT} \perp \overleftrightarrow{PQ}$

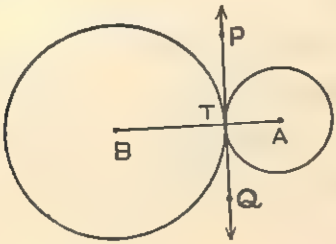
চিত্র (i)-এর ক্ষেত্রে, A এবং B বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{PQ}$ স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

এখানে $\angle ATP$-এর পরিমাপ $=90^\circ$ এবং $\angle BTP$-এর পরিমাপ $=90^\circ$

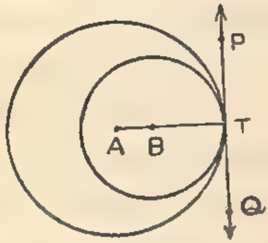
এখন $\angle BTA$-এর পরিমাপ $=\angle ATP$-এর পরিমাপ $+\angle BTP$-এর পরিমাপ।

$$=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$

$\therefore$ $\angle BTA$ সরলকোণ। $\therefore$ A, T, B বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

আবার চিত্র (ii)-এর ক্ষেত্রে,

A এবং B বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{PQ}$ স্পর্শকের একই পার্শ্বে অবস্থিত ;

এবং $\angle ATP$-এর পরিমাপ $=90^\circ=\angle BTP$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\overline{AT}$ এবং $\overline{BT}$ রেখাংশদ্বয় দুইটি ভিন্ন সরলরেখার উপর অবস্থিত হইতে পারে না।

$\therefore$ A, B, T বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য : (*a*) চিত্র (i)-এর বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। এক্ষেত্রে, বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের যোগফল $=AT+BA=AB=$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব।

(*b*) চিত্র (ii)-এ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। এক্ষেত্রে, বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের বিয়োগফল $=AT-BT=AB=$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব।

অনুশীলনী 6

1. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O ; উহার বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে বৃত্তে $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক টানা হইল। যদি OP = 13 সে. মি. এবং OT = 5 সে. মি. হয় তবে $\overline{PT}$-এর দৈর্ঘ্য কত ?

2. দেখাও যে-কোন বৃত্তে পরিলখিত চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি বিপরীত বা দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান।

3. স্পর্শবিন্দু হইতে কোন বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ বৃত্তের কে বিন্দুগামী হইবে।

4. 3 সে.মি. ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন কর।

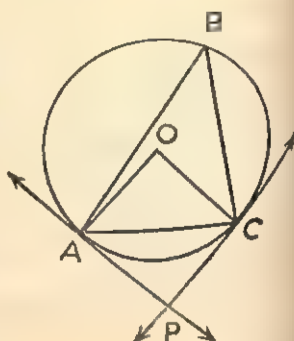
5. কোন বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যা-সমূহ স্প বিন্দুগামী ব্যাসদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

6. কোন বৃত্তের বৃত্তাংশস্থিত $\angle ABC$-এর পরিমাপ 45° হইলে দেখাও যে, A এ C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব।

স্বীকার ঃ ABC বৃত্তের কেন্দ্র O ; উহার A এবং C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শ দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে $\angle ABC$-এর পরিমাপ$=45^\circ$.

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\angle APC$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ $\overline{OA}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।



প্রমাণ ঃ এখানে $\angle AOC$-এর পরিমাপ $=2\angle ABC$-এর পরিমাপ$=90^\circ$ ... (i)

আবার $\angle PAO$-এর পরিমাপ$=90^\circ$

$(\because \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP})$;

এবং $\angle PCO$-এর পরিমাপ$=90^\circ$

$(\because \overline{OC} \perp \overleftrightarrow{CP})$.

$\therefore$ OAPC চতুর্ভুজের $\angle PAO$-এর পরিমাপ$+\angle PCO$-এর পরিমাপ

$=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

$\therefore$ $\angle APC$-এর পরিমাপ$+\angle AOC$-এর পরিমাপ$=180^\circ$

$\therefore$ $\angle APC$-এর পরিমাপ$=180^\circ-\angle AOC$-এর পরিমাপ

$=180^\circ-90^\circ$ [(i) হইতে]

$=90^\circ$.

7. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাংশটি ব্যাস হইবে।

8. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। কোন

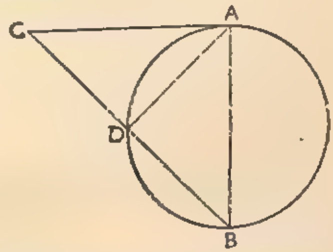
সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে B এবং C বিন্দুতে স্পর্শ করিলে দেখাও যে, $\angle BPC$-এর পরিমাপ$=90°$.

9. $\overline{AB}$ কোন বৃত্তের ব্যাস। A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক-রেখাংশ $\overline{AC}$; এবং $\overline{BC}$ বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $AC=AB$ হয়, তবে দেখাও যে, $BD=CD$ এবং $AD=\frac{1}{2}BC$.

স্বীকার ঃ ABD বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$; এবং $\overline{AC}$, বৃত্তটির A বিন্দুতে স্পর্শক-রেখাংশ। $\overline{BC}$ রেখাংশটি বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে $AC=AB$.

প্রমাণ্য বিষয় ঃ $BD=CD$ এবং $AD=\frac{1}{2}BC$.

প্রমাণ ঃ এখানে $\angle BDA$-এর পরিমাপ$=90°$ (অর্ধবৃত্তস্থকোণ)।



$\therefore$ ADB এবং ADC সমকোণী ত্রিভুজ-দ্বয়ে, $\overline{AB}\cong\overline{AC}$ ($\because$ $AB=AC$) এবং $\overline{AD}\cong\overline{AD}$.

$\therefore$ $\triangle ADB\cong\triangle ADC$

$\therefore$ $\overline{BD}\cong\overline{CD}$;

$\therefore$ $BD=CD$,

আবার $\overline{AC}$ স্পর্শক-রেখাংশ এবং $\overline{AB}$ ব্যাস বলিয়া $\angle BAC$-এর পরিমাপ$=90°$

$\therefore$ $\triangle ABC$ সমকোণী।

এখন $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}\cong\overline{AC}$; $\therefore$ $\angle BCA\cong\angle ABC$

$\therefore$ $\angle BCA$-এর পরিমাপ$=\angle ABC$-এর পরিমাপ$=45°$

$\therefore$ ADB সমকোণী ত্রিভুজের $\angle DAB$-এর পরিমাপ$=45°$;

$\therefore$ $\angle ABD\cong\angle DAB$.

$\therefore$ $\overline{AD}\cong\overline{BD}$

এখন $BC=2BD$; $\therefore$ $BC=2AD$ $\therefore$ $AD=\frac{1}{2}BC$

10. কোন বৃত্তের বহিঃস্থ O বিন্দুটির, উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র হইতে দূরত্ব, বৃত্তটির ব্যাস $\overline{AB}$-এর দৈর্ঘের সমান। $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ বৃত্তটির স্পর্শক-রেখাংশ হইলে দেখাও যে OAB ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

11. কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ উহার একটি জ্যা। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AM}$ বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি $\overline{AC}$-এর বর্ধিতাংশের সহিত P বিন্দুতে মিলিত হয়। দেখাও যে, $\angle APD$ সমকোণ।

12. $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক-রেখাংশ এবং O উহার কেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $\overline{AO}$ রেখাংশটি স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা $\overline{BC}$-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

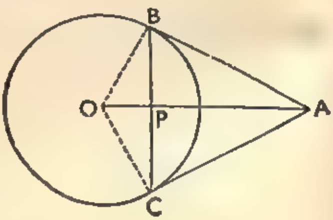
স্বীকার : O কেন্দ্রিক বৃত্তের $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ স্পর্শক-রেখাংশ। $\overline{OA}$, $\overline{BC}$-কে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় : $\overline{OA} \perp \overline{BC}$ এবং $BP = PC$.

অঙ্কন : $\overline{OB}$ এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ স্পর্শক-রেখাংশদ্বয় দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle AOB$ এবং $\angle AOC$.

$\therefore \quad \angle AOB \cong \angle AOC$.



এখন $\triangle BOP$ এবং $\triangle COP$-এর মধ্যে,

$\overline{OB} \cong \overline{OC}$, $\angle POB \cong \angle POC$ এবং $\overline{OP} \cong \overline{OP}$.

$\therefore \quad \triangle BOP \cong \triangle COP$

$\therefore \quad \overline{BP} \cong \overline{PC}$; এবং $\angle BPO \cong \angle CPO \quad \therefore \quad BP = PC$;

এবং BPC সরলকোণ বলিয়া $\angle OPB$ এবং $\angle OPC$ প্রত্যেকেই সমকোণ।

$\therefore \quad \overline{OP} \perp \overline{BC}$; অতএব, $\overline{OA} \perp \overline{BC}$.

13. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি বিপরীত বাহু উহার কেন্দ্রে যে দুইটি সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহারা একত্রে দুই সমকোণের সমান হইবে।

14. O কেন্দ্রিক বৃত্তের T বহিঃস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের A এবং B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা হইল। $\overline{OT}$ বৃত্তটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, $\angle TAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক P-বিন্দুগামী হইবে।

15. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক বৃত্তদ্বয়কে P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শ করিলে প্রমাণ কর যে, $\angle PAQ$-এর পরিমাপ $+ \angle PBQ$-এর পরিমাপ $= 180°$

16. A এবং B দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। স্পর্শবিন্দু C-এর মধ্য দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত $\overline{PQ}$ এরূপে টানা হইল যেন $\overline{PQ}$, A এবং B কেন্দ্রিক বৃত্তদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে মিলিত

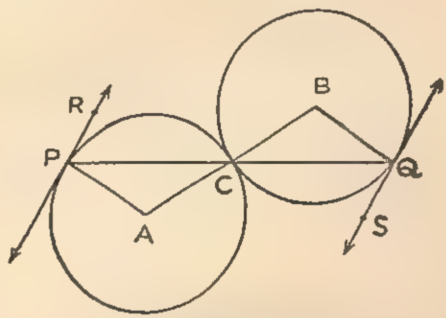
হয় এবং যদি P, A, Q, B সমরেখ না হয় তবে প্রমাণ কর যে, (i) $\overline{PA} \parallel \overline{BQ}$ এবং (ii) P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

স্বীকার: A এবং B কেন্দ্রিক বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। C বিন্দুগামী রেখাংশটি A কেন্দ্রিক বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং B কেন্দ্রিক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় যথাক্রমে $\overleftrightarrow{PR}$ এবং $\overleftrightarrow{QS}$.

প্রামাণ্য বিষয়: $\overline{PA} \parallel \overline{BQ}$ এবং $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{QS}$.

অঙ্কন: $\overline{AB}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ: বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে C বিন্দুতে স্পর্শ করে বলিয়া A, C এবং B বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে।



এখন $\triangle PAC$-এর

$\angle APC \cong \angle ACP$

($\overline{AP} \cong \overline{AC}$)

আবার $\triangle QBC$-এর

$\angle BQC \cong \angle BCQ$

($\because$ $\overline{BQ} \cong \overline{BC}$)

কিন্তু $\angle ACP \cong \angle BCQ$

(বিপ্রতীপ)।

$\therefore$ $\angle APC \cong \angle BQC$; ইহারা একান্তর কোণ। $\therefore$ $\overline{PA} \parallel \overline{BQ}$.

আবার $\angle APR \cong \angle BQS$ (প্রত্যেক সমকোণ)

$\therefore$ $\angle APR$-এর পরিমাপ $-$ $\angle APC$-এর পরিমাপ

$=$ $\angle BQS$-এর পরিমাপ $-$ $\angle BQC$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\angle CPR$-এর পরিমাপ $=$ $\angle CQS$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\angle CPR \cong \angle CQS$; কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{QS}$.

17. A কেন্দ্রিক বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু B ; $\overline{AB}$-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি A কেন্দ্রিক বৃত্তটিকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\overline{BP}$ এবং $\overline{BQ}$ উভয়েই A-কেন্দ্রিক বৃত্তের স্পর্শক-রেখাংশ।

18. দুইটি সর্বসম বৃত্ত পরস্পরকে T বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। $\overline{PQ}$ এবং $\overline{SR}$ ব্যাসদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। যদি S এবং Q বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{PR}$ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি রম্বস।

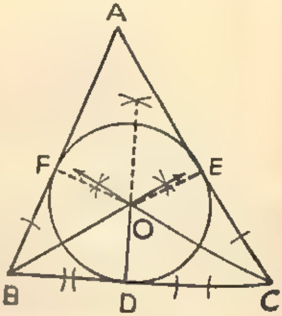
19. O কেন্দ্রিক কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$; বৃত্তটির P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি উহার A এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\angle MON$ সমকোণ।

সম্পাদ্য 2

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর।

[Construct a circle inscribed in a given triangle.]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। এখানে ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।



অঙ্কন : $\angle ABC$ এবং $\angle BCA$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হইল।

মনে কর, ঐ সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হইল। $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ টানা হইল।

এখন O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OD}$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ : $\overline{OE} \perp \overline{AC}$ এবং $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ টানা হইল।

যেহেতু O-বিন্দু, $\angle ABC$-এর অন্তঃ সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত অতএব $OD = OF$. $\therefore$ $\overline{OD} \cong \overline{OF}$;

অনুরূপে, O-বিন্দু, $\angle ACB$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া $OD = OE$. $\therefore$ $\overline{OD} \cong \overline{OE}$.

$\therefore$ O-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি D, E, F বিন্দু দিয়া যাইবে।

এখন $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, $\overline{OE} \perp \overline{AC}$ এবং $\overline{OF} \perp \overline{AB}$.

$\therefore$ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বৃত্তটিকে যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী 7

1. 3 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উহার অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর।

2. ABC ত্রিভুজের AB = 1·8 ইঞ্চি এবং CA = 2·4 ইঞ্চি; ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর।

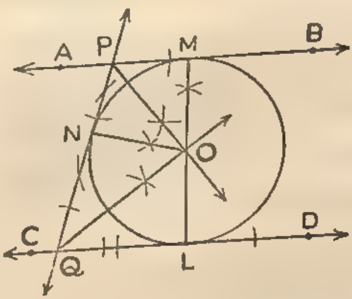
3. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং উক্ত বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া গমন করে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

4. $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটি পরস্পর সমান্তরাল। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা A এবং B বিন্দু দিয়া গমন করে এবং $\overline{CD}$-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

5. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং উহাদের ভেদককে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{PQ}$ সরল রেখা $\overleftrightarrow{AB}$-কে P বিন্দুতে ও $\overleftrightarrow{CD}$-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহা $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{PQ}$-কে স্পর্শ করে।

অঙ্কন ঃ ∠QPB এবং ∠DQP-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় অঙ্কন করা হইল। উক্ত অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। O বিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ এবং $\overline{OL}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। এখন O-কে কেন্দ্র করিয়া OM ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন কর হইল। তাহা হইলে উক্ত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।



প্রমাণ ঃ ∠QPB-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত O বিন্দু হইতে কোণটির বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$; ∴ OM = ON;

∴ $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

অনুরূপে ∠DQP-এর ক্ষেত্রে $\overline{ON} \cong \overline{OL}$.

∴ $\overline{OM} \cong \overline{ON} \cong \overline{OL}$.

∴ অঙ্কিত বৃত্তটি M, N এবং L বিন্দু দিয়া গমন করে।

আবার ∠PMO, ∠PNO এবং ∠OLQ-এর প্রত্যেকেই সমকোণ।

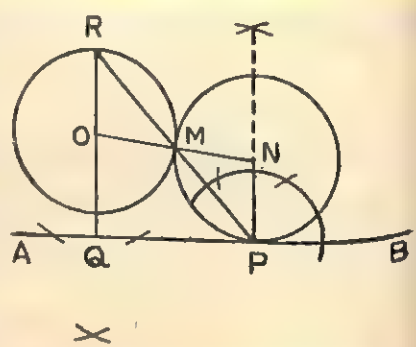
∴ $\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা তিনটি বৃত্তটির যথাক্রমে M, N এবং L বিন্দুতে স্পর্শক।

6. একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধযুক্ত এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা তুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখাকে স্পর্শ করে।

7. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এবং একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

মনে কর, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং নির্দিষ্ট রেখাংশ $\overline{AB}$-এর উপরিস্থিত P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহা $\overline{AB}$ রেখাংশকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং O কেন্দ্রিক একটি বৃত্তকেও স্পর্শ করে।

অঙ্কন ঃ $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ অঙ্কন করা হইল। $\overline{QO}$-কে বর্ধিত করাতে উহা O কেন্দ্রিক বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{PR}$ অঙ্কন করা হইল। $\overline{PR}$, O কেন্দ্রিক বৃত্তটিকে M বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{AB}$-এর P বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করা হইল। $\overline{OM}$ যুক্ত করিয়া বর্ধিত করাতে উহা P বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বটিকে N বিন্দুতে ছেদ করিল। N-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{NP}$ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে N কেন্দ্রিক বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।



বিঃ দ্রঃ বৃত্তটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে বলা হইলে $\overline{AB}$-এর স্থানে $\overleftrightarrow{AB}$ লইতে হইবে।

8. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

9. PQR ত্রিভুজের PQ=3 সে মি., QR=3·5 সে. মি.। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

চতুর্থ অধ্যায়

সাদৃশ্য রূপান্তর ও অনুপাত

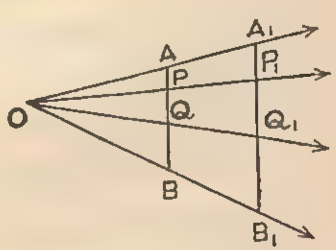
পূর্ববর্তী শ্রেণীতে প্রতিফলন, চলন এবং আবর্তন সম্বন্ধে বিস্তারিত ভাবে আলোচনা করা হইয়াছে। প্রতিফলন, চলন এবং আবর্তন প্রভৃতি রূপান্তর দ্বারা কোন জ্যামিতিক চিত্রের আকার এবং আকৃতির কোন প্রকার পরিবর্তন সংগঠিত হয় না। সিনেমার পর্দায় ফিল্মের চিত্র, বইয়ের পাতায় কোন দেশের মানচিত্র, ক্যামেরায় তোলা ছবি প্রভৃতি, রূপান্তরের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের আকৃতির কোনই পরিবর্তন হয় না কিন্তু আকারের পরিবর্তন ঘটে। **পরিবর্ধন** (Enlargement) এবং **সাদৃশ্য রূপান্তর** (Similarity Transformation) এই প্রকারের রূপান্তর।

4.1 পরিবর্ধন ঃ মনে কর, P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং m শূন্য নহে এরূপ একটি বাস্তব সংখ্যা, এখন একটি চিত্রণকে পরিবর্ধন (Enlargement) বলা হইবে যদি A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1 সর্বদা $\overrightarrow{PA}$-এর উপর অবস্থিত এবং $\frac{PA_1}{PA}=m$ হয়, যখন $m>0$

অথবা, A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1 সর্বদা $\overrightarrow{PA}$-এর বিপরীত রশ্মির উপর অবস্থিত এবং $\frac{PA_1}{PA}=n$ হয়, যখন $m<0$ এবং $m=-n$, $n>0$.

এক্ষেত্রে, P বিন্দুটিকে **পরিবর্ধন কেন্দ্র** (centre of enlargement) এবং m কে P এর সাপেক্ষে পরিবর্ধনের **পরিমাণ-গুণক** (scale factor) বলে।

মনে কর, কোন সমতলে একটি নির্দিষ্ট পরিবর্ধনের পরিপ্রেক্ষিতে O পরিবর্ধন কেন্দ্র এবং m, উক্ত পরিবর্ধনের পরিমাণ-গুণক। মনে কর $m>0$ একই সমতলে A একটি বিন্দু এবং উক্ত পরিবর্ধনের পরিপ্রেক্ষিতে A_1 বিন্দু, A বিন্দুর প্রতিবিম্ব। অতএব A_1 বিন্দু, $\overrightarrow{OA}$-এর উপর অবস্থিত এবং $\frac{OA_1}{OA}=m$.



যে সমতলে O, A এবং A_1 আছে সেই সমতলে অপর যে-কোন একটি বিন্দু B লওয়া হইল। $\overline{AB}$ অঙ্কন করা হইল।

A_1 বিন্দু হইতে $\overline{AB}$-এর সমান্তরাল রেখাংশ অঙ্কন করাতে উহা $\overrightarrow{OB}$-কে B_1 বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন লক্ষ্যকর যে, B_1 বিন্দু $\overrightarrow{OB}$-এর উপর অবস্থিত ; এবং এক্ষেত্রে দেখান যাইবে যে $\frac{OB_1}{OB}=\frac{OA_1}{OA}=m$ হইবে। অতএব উক্ত পরিবর্ধনের পরিপ্রেক্ষিতে B_1 বিন্দু, B বিন্দুর প্রতিবিম্ব।

অতএব নিদিষ্ট পরিবর্ধনের ক্ষেত্রে একটি বিন্দু এবং উহার পরিবর্ধন দেওয়া থাকিলে, ঐ সমতলস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুরই প্রতিবিম্ব নির্ণয় করা যায়। $m<0$ হইলেও অনুরূপ প্রমাণ দেওয়া সম্ভব।

পরিবর্ধন সম্পর্কে কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :

মনে কর, O পরিবর্ধন-কেন্দ্র এবং m একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। একই সমতলে A এবং B এরূপ দুইটি বিন্দু যাহাতে $\frac{OA_1}{OA}=m$ এবং $\frac{OB_1}{OB}=m$. স্পষ্টতঃই A_1 এবং B_1 যথাক্রমে O পরিবর্ধন-কেন্দ্রের সাপেক্ষে A এবং B-এর প্রতিবিম্ব। এখন $\overline{AB}$-এর উপর P এবং Q দুইটি বিন্দু লওয়া হইল। $\overrightarrow{OP}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ অঙ্কন করাতে উহারা $\overline{A_1B_1}$-কে যথাক্রমে P_1 এবং Q_1 বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখা যাইবে যে, $\frac{OP_1}{OP}=m$ এবং $\frac{OQ_1}{OQ}=m$; অর্থাৎ $\overline{AB}$-এর উপরিস্থিত P এবং Q বিন্দুর O পরিবর্ধন কেন্দ্রের পরিপ্রেক্ষিতে প্রতিবিম্ব যথাক্রমে P_1 এবং Q_1.

অতএব $\overline{AB}$-এর প্রতিটি বিন্দুর, O পরিবর্ধন কেন্দ্রের সাপেক্ষে $\overline{A_1B_1}$-এর উপর একটি করিয়া প্রতিবিম্ব বিন্দু পাওয়া যাইবে, এবং এই প্রতিবিম্ব-বিন্দু সমূহের সমন্বয়ই $\overline{A_1B_1}$; এক্ষেত্রে $\overline{A_1B_1}$-কে O পরিবর্ধন-কেন্দ্রের সাপেক্ষে $\overline{AB}$ এর প্রতিবিম্ব বলা হয়। অতএব বলা যায় যে, পরিবর্ধনের ফলে কোন রেখাংশের প্রতিবিম্ব এরূপ একটি রেখাংশ হইবে যাহা মূল রেখাংশটির সমান্তরাল।

(ii) উক্ত পরিবর্ধনটির ক্ষেত্রে $\frac{A_1B_1}{AB}=m$ হইবে। অতএব, কোন পরিবর্ধনের পরিমাণ-গুণক m হইলে, মূল রেখাংশ এবং উহার প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $1:m$ হইবে।

(iii) চিত্রটি হইতে ইহা স্পষ্ট যে, $\angle OAB$-এর পরিমাপ$=\angle OA_1B_1$-এর পরিমাপ; অর্থাৎ, পরিবর্ধনের ফলে মূল কোণ এবং উহার প্রতিবিম্বের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকে।

(iv) চিত্রনটির ক্ষেত্রে $\dfrac{P_1A_1}{PA}=\dfrac{P_1Q_1}{PQ}=\dfrac{B_1P_1}{BP}=m$;

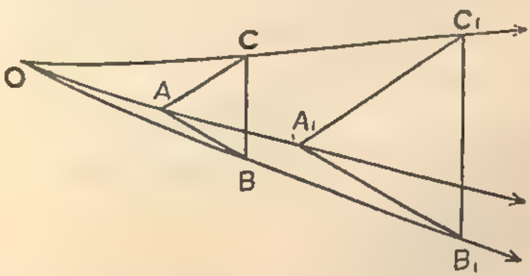
অতএব, কোন পরিবর্ধনের পরিমাণ-গুণক m হইলে, মূল রেখাংশের যেকোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য এবং উক্ত রেখাংশটির প্রতিবিম্ব রেখাংশের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $1 : m$ হইবে।

সাদৃশ্য ঃ সসীম সংখ্যক প্রতিফলনের সমষ্টিগত ফলকে **প্রতিসাম্য** (Isometries) বলে। আবার সসীম সংখ্যক প্রতিসাম্য এবং পরিবর্ধনের সমষ্টিগত ফলকে **সাদৃশ্য** (Similarity) বলা হয়।

উক্ত সংজ্ঞা হইতে বলা যায় যে, পরিবর্ধন এক ধরনের সাদৃশ্য রূপান্তর।

সক্রিয়তার মাধ্যমে সাদৃশ্য রূপান্তর ঃ

উদা. 1. একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর। $\triangle ABC$-এর ধারক সমতলের উপর এরূপ একটি বিন্দু O লও যাহা $\triangle ABC$-এর বহিঃস্থ তলে অবস্থিত হয়। $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$-এর উপর যথাক্রমে A_1, B_1 এবং C_1 বিন্দু তিনটিকে এরূপে স্থাপন কর যাহাতে $OA_1=2OA$, $OB_1=2OB$ এবং



$OC_1=2OC$ হয়। $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। অতঃপর চিত্রটিকে লইয়া নিম্নলিখিত প্রক্রিয়াগুলি সম্পাদন কর।

(i) স্কেলের সাহায্যে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, A_1B_1, $\overline{B_1C_1}$ এবং $\overline{C_1A_1}$-এর দৈর্ঘ্য

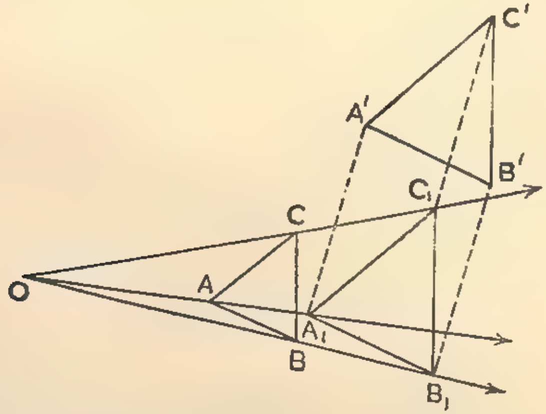
নির্ণয় কর। $\frac{A_1B_1}{AB}$, $\frac{B_1C_1}{BC}$ এবং $\frac{C_1A_1}{CA}$-এর মান নির্ণয় কর। দেখিবে যে,

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}=2.$$

(ii) $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$, $\angle B_1A_1C_1$, $\angle A_1C_1B_1$ এবং $\angle C_1B_1A_1$ এর পরিমাপ নির্ণয় কর। দেখিবে যে, $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$, $\angle ACB \cong \angle A_1C_1B_1$ এবং $\angle CBA \cong \angle C_1B_1A_1$; অতএব চিত্রণটির ক্ষেত্রে $\overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}$, $\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}$ এবং $\overline{CA} \parallel \overline{C_1A_1}$.

লব্ধ সিদ্ধান্তসমূহ হইতে বলা যায় যে, চিত্রণটি এরূপ একটি পরিবর্ধন যাহার পরিবর্ধন কেন্দ্র O এবং পরিমাণ গুণক 2. স্পষ্টতঃই $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটি O পরিবর্ধন কেন্দ্রের সাপেক্ষে ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব। এক্ষেত্রে সমগ্র চিত্রণটি জ্যামিতিক চিত্রটির সাদৃশ্য রূপান্তরের উদাহরণ।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর। $\triangle ABC$-এর বহিঃস্থ তলে O একটি বিন্দু লও। $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$-এর উপর A_1, B_1 এবং C_1 বিন্দু তিনটিকে এরূপে লও যাহাতে $2OA_1=3OA$, $2OB_1=3OB$ এবং $2OC_1=3OC$ হয়। $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। এখন চলন প্রক্রিয়ার সাহায্যে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটিকে $A'B'C'$ ত্রিভুজে রূপান্তর কর।



এক্ষেত্রে সমগ্র চিত্রণটি জ্যামিতিক চিত্রটির সাদৃশ্য রূপান্তরের উদাহরণ। এই চিত্রণটিতে O পরিবর্ধন-কেন্দ্র এবং পরিবর্ধনের পরিমাণ-গুণক $m=\frac{3}{2}$.

অনুশীলনী 8A

1. পরিবর্ধন কাহাকে বলে? কোন পরিবর্ধনের পরিমান-গুণক বলিতে কি বুঝায়? পরিবর্ধন কেন্দ্র কি?

2. প্রতিফলন, চলন এবং আবর্তন প্রভৃতি রূপান্তরকে পরিবর্ধন বলা যায় কি?

3. সাদৃশ্য কাহাকে বলে? একটি সদৃশ পরিবর্ধনের সাপেক্ষে B-এর প্রতিবিম্ব C এবং Dএর প্রতিবিম্ব E হইলে $\overline{BD}$ এবং $\overline{CE}$ পরস্পর সমান্তরাল হইবে কি?

4. ABC একটি ত্রিভুজ আঁক। এখন পরিবর্ধনকেন্দ্র O এবং পরিবর্ধনের পরিমান গুণক $m=2$ ধরিয়া চিত্রণটি সম্পন্ন কর। এক্ষেত্রে $\triangle ABC$ এবং উহার প্রতিবিম্ব $\triangle A_1B_1C_1$ হইলে উহাদের বাহুসমূহের মধ্যে কিরূপ সম্পর্ক পাওয়া যাইবে?

5. ABCD একটি চতুর্ভুজ আঁক। পরিবর্ধনের কেন্দ্র O এবং পরিবর্ধনের পরিমান গুণক $m=\frac{3}{2}$ ধরিয়া চিত্রণটি অঙ্কন কর।

6. একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC আঁক। P-কে পরিবর্ধনকেন্দ্র এবং পরিবর্ধনের পরিমান গুণক $m=2$ ধরিয়া $\triangle ABC$এর প্রতিবিম্ব $\triangle A_1B_1C_1$ অঙ্কন কর। পুনরায় $\triangle A_1B_1C_1$-কে চলনের দ্বারা $\triangle A'B'C'$-এ রূপান্তরিত কর। এক্ষেত্রে,

(i) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ হইবে কি?

(ii) $B'C'=B_1C_1$ হইবে কি?

(iii) $\overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}$ হইবে কি?

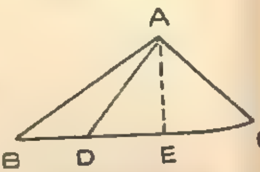
4.2. অনুপাত (Ratio): দুইটি এক জাতীয় (সমএককবিশিষ্ট) রাশির মধ্যে একটি অপরটির কতগুণ বা কত অংশ, ইহা যে শুদ্ধ সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহাকে ঐ রাশিদ্বয়ের **অনুপাত** (Ratio) বলে।

যথা, সর্বসম নয় এরূপ দুইটি বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x cms. এবং y cms. হইলে পরিধি দুইটির অনুপাত$=\frac{x}{y}$; আবার যদি $\triangle ABC$ এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p সে.মি. এবং q সে.মি. হয় তবে ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $=\frac{p}{q}$ হইবে।

বিঃ দ্রঃ এই অধ্যায়ে দুইটি রেখাংশের অনুপাত বা ত্রিভুজের বাহুর অনুপাত বলিতে আমরা রেখাংশের বা ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাতকে বুঝিব। অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুর অনুপাত বলিতে AB এবং AC-এর অনুপাতকে বুঝিতে হইবে।

4.3. সমানুপাত (Proportion) : দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে উহাদিগকে **সমানুপাত (Proportion)** বলে। ধর, ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রে $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$; অর্থাৎ $\triangle$ABC-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুর অনুপাত এবং $\triangle$ DEF-এর $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$ বাহুদ্বয়ের অনুপাত পরস্পর সমান। অতএব ইহা একটি সমানুপাত।

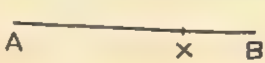
একই উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের ভূমির অনুপাতের সমান। পার্শ্বের চিত্রে $\triangle$ABC এবং $\triangle$ADC-এর ভূমি যথাক্রমে $\overline{BC}$ এবং $\overline{DC}$; $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ টানা হইল। অতএব উভয় ত্রিভুজের উচ্চতা AE.



$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle ADC\text{-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\frac{1}{2}BC.AE}{\frac{1}{2}DC.AE}=\frac{BC}{DC}.$$

যদি a, b, c, d রাশি চারিটি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, তবে রাশি চারিটিকে সমানুপাতী (Proportional) বলে। মনে কর, a, b, c......এবং x, y, z...দুইটি ধনাত্মক রাশির শ্রেণী। এখন যদি $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\cdots\cdots$হয়, তবে শ্রেণী দুইটিকে পরস্পরের সমানুপাতিক বলা হয়।

মনে কর, $\overline{AB}$ রেখাংশের উপর X এরূপ একটি বিন্দু লওয়া হইল যাহাতে AX : BX $=p:q$ (এখানে p এবং q যথাক্রমে দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা) হয়।



তাহা হইলে বলা হইবে যে X বিন্দু $\overline{AB}$ রেখাংশকে $p:q$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে। এখন X বিন্দুটি $\overline{AB}$ রেখাংশের মধ্যবর্তী বিন্দু (অর্থাৎ A – X – B) হইলে AB রেখাংশটি ঐ বিন্দুতে **অন্তর্বিভক্ত** হইয়াছে বলিয়া ধরিতে হইবে। আবার যদি X বিন্দুটি $\overline{AB}$ রেখাংশটির বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত (অর্থাৎ A – B – X) হইয়া $\overline{AB}$-কে $p:q$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে $\overline{AB}$ রেখাংশটি ঐ বিন্দুতে **বহির্বিভক্ত** হইয়াছে বলিয়া ধরা হইবে।

যদি $\overleftrightarrow{MN}$ সরলরেখা $\triangle$ABC-এর $\overline{AB}$ বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে তবে

A — D — B হইলে বলা হইবে যে $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{AB}$-কে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করিয়াছে। কিন্তু এক্ষেত্রে A — B — D হইলে $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{AB}$-কে বহিঃস্থভাবে ছেদ করিয়াছে বলা হইবে।

উপপাদ্য 12

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তরাল করিয়া কোন রেখা টানিলে উহা অপর দুই বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে। বিপরীতক্রমে, যদি কোন রেখা একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে ঐ রেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

[If a line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally. Conversely, if a line divides two sides of a triangle proportionally, then the line is parallel to the third side of the triangle.] .

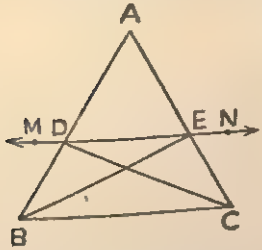
স্বীকার : ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$ বাহুর সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{MN}$ টানা হইয়াছে। $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$-কে অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থভাবে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

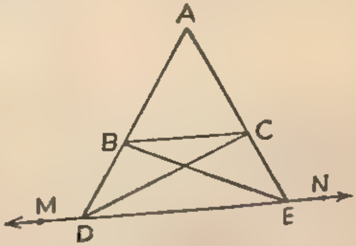
প্রামাণ্য বিষয় : $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{EC}$.

অঙ্কন : $\overline{BE}$ এবং $\overline{CD}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে $\triangle ADE$ এবং $\triangle DBE$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট বলিয়া

$$\frac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle DBE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{AD}{DB} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$





আবার, $\triangle ADE$ এর $\triangle DCE$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট বলিয়া

$$\frac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle DCE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{AE}{EC} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু $\triangle DBE$ এবং $\triangle DCE$ উভয়েই একই ভূমি $\overline{DE}$ এবং একই সমান্তরাল যুগল $\overline{DE}$ ও $\overline{BC}$-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\triangle BDE$-এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle DCE$-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ $\dfrac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle DBE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle DCE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}$

$\therefore$ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.

বিপরীতক্রমে,

স্বীকার : $\overleftrightarrow{MN}$ সরলরেখা $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুকে অন্তঃস্থ বা বাহ্যঃস্থভাবে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে,

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{BC}$

অঙ্কন : $\overline{BE}$ এবং $\overline{CD}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে, $\dfrac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle DBE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{AD}{DB}$ [$\triangle ADE$ এবং $\triangle DBE$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

আবার, $\dfrac{\triangle ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle CDE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{AE}{EC}$ [$\triangle ADE$ এবং $\triangle DCE$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

এখন $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{EC}$ (স্বীকার)।

$\therefore$ $\triangle DBE$-এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle CDE$-এর ক্ষেত্রফল ; কিন্তু ইহারা একই ভূমি $\overline{DE}$-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

$\therefore$ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; অর্থাৎ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{BC}$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুর উপর যথাক্রমে P এবং Q দুইটি বিন্দু। যদি $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$ হয় তবে দেখাও যে, $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

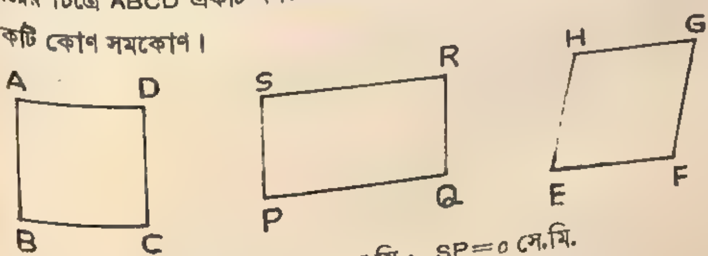
4.4. সদৃশ বহুভুজ : সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলি যথাক্রমে অপরটির কোণগুলির সহিত সর্বসম হইলে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বলে

যথা, দুইটি বর্গক্ষেত্র সদৃশকোণী, দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ সদৃশকোণী, দুইটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ সদৃশকোণী, একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি আয়তক্ষেত্র পরস্পর সদৃশকোণী। ABCDE এবং PQRST পঞ্চভুজ দুইটির $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, $\angle D \cong \angle S$ এবং $\angle E \cong \angle T$; অর্থাৎ ইহারা সদৃশকোণী। এখানে যে-কোণ দুইটি সর্বসম কোণের বিপরীত বাহুকে অনুরূপ বাহু বলে। যেমন, $\angle A \cong \angle P$ বলিয়া $\overline{CD}$ এবং $\overline{RS}$ অনুরূপ বাহু।

যদি সদৃশকোণী পঞ্চভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্যসমূহ পরস্পর সমানুপাতে থাকে, অর্থাৎ যদি $\frac{CD}{RS}=\frac{DE}{ST}=\frac{EA}{TP}=\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ হয় তবে উহাদের সদৃশ বলা হইবে।

সম-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজকে তখনই সদৃশ বলা হইবে যদি উহারা সদৃশকোণী হয় এবং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্যসমূহও সমানুপাতে থাকে।

নিম্নের চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং PQRS একটি আয়তক্ষেত্র। ইহাদের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।



মনেকর, $AB=a$ সে.মি , $PQ=b$ সে.মি ; $SP=c$ সে.মি.

ধর, $b \neq c$; অতএব, $\frac{BC}{PQ} \neq \frac{AB}{SP}$.

অতএব, উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী নয়। অর্থাৎ উহারা সদৃশ নহে।

মনে কর, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং EFGH একটি রম্বস। ইহাদের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি.।

∴ এখানে $\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CD}{GH}=\frac{DA}{HE}$; অর্থাৎ ইহাদের বাহুগুলি সমানুপাতী কিন্তু ABCD এবং EFGH সদৃশকোণী নয়। অতএব, উহারা সদৃশ নহে।

উপরের আলোচনা হইতে দেখা গেল যে একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি আয়তক্ষেত্র পরস্পর সদৃশকোণী হওয়া সত্ত্বেও উহারা সদৃশ হইল না। আবার একটি রম্বস ও একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি সমানুপাতে থাকিলেও উহারা সদৃশ নহে।

ত্রিভুজও একটি বহুভুজ। অতএব দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্যসমূহ সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে। এখন নিম্নলিখিত উপপাদ্যগুলিতে প্রমাণ করা হইবে যে দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে অথবা উহাদের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যসমূহ সমান অনুপাতে থাকিলে উহারা পরস্পর সদৃশ হইবে।

উপপাদ্য 13

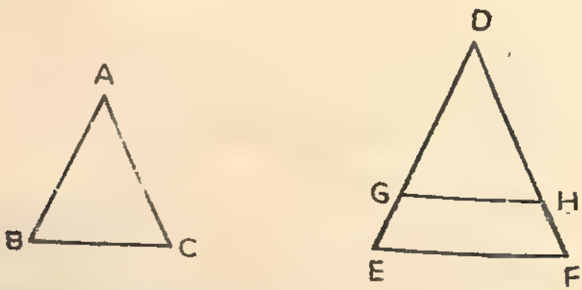
দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

বিপরীতক্রমে, দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে

[If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.

Conversely, if two triangles have their sides proportional when taken in order they are equiangular.]

স্বীকার ঃ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ এবং $\angle C \cong \angle F$



প্রামাণ্য বিষয় ঃ $\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}$.

অঙ্কন : $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$ হইতে যথাক্রমে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$-এর সর্বসম করিয়া $\overline{DG}$ এবং $\overline{DH}$ রেখাংশদ্বয় কাটিয়া লওয়া হইল। $\overline{GH}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle DGH$ এবং $\triangle ABC$-এর মধ্যে, $\overline{DG} \cong \overline{AB}$, $\overline{DH} \cong \overline{AC}$, $\angle HDG \cong \angle CAB$. (স্বীকার)।

$\therefore$ $\triangle DGH \cong \triangle ABC$.

$\therefore$ $\angle DGH \cong \angle ABC$; কিন্তু $\angle ABC \cong \angle DEF$. (স্বীকার)

$\therefore$ $\angle DGH \cong \angle DEF$. $\therefore$ $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$.

$$\therefore \frac{DG}{DE}=\frac{DH}{DF} \qquad \therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$

অনুরূপে দেখান যায়, $\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$.

$$\therefore \frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}.$$

বিপরীতক্রমে,

স্বীকার : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

অঙ্কন : $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$ হইতে যথাক্রমে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$-এর সর্বসম করিয়া $\overline{DG}$ এবং $\overline{DH}$ রেখাংশদ্বয় কাটিয়া লওয়া হইল। $\overline{GH}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : এখানে $\overline{AB} \cong \overline{DG}$ এবং $\overline{AC} \cong \overline{DH}$. [অঙ্কন]

এখন, $\frac{AB}{DE}=\frac{CA}{FD}$; $\therefore$ $\frac{DG}{DE}=\frac{DH}{FD}$

$\therefore$ $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$. $\therefore$ $\angle DGH \cong \angle DEF$

এবং $\angle DHG \cong \angle DFE$

$\therefore$ $\triangle DGH$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{GH}{EF}=\frac{DH}{FD}$$

কিন্তু, $\frac{DH}{FD}=\frac{CA}{FD}$ ($\because$ $\overline{DH} \cong \overline{AC}$)

$$\therefore \frac{GH}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{BC}{EF} \quad [\text{ স্বীকার }].$$

$\therefore$ $GH = BC$; $\therefore$ $\overline{GH} \cong \overline{BC}$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DGH$

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DGH$ সদৃশকোণী।

কিন্তু, $\triangle DGH$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

বিশেষ উপপাদ্য

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সহিত সর্বসম হয় এবং ঐ সর্বসম কোণদ্বয়ের বাহুদ্বয় সমানুপাতী হয় তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

স্বীকার : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ এর $\angle BAC \cong \angle EDF$

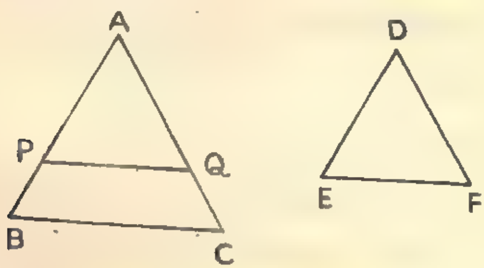
এবং $AB : DE = AC : DF$

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশ।

অঙ্কন : $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহু হইতে $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$-এর সর্বসম করিয়া যথাক্রমে $\overline{AP}$ এবং $\overline{AQ}$ রেখাংশদ্বয় কাটিয়া লওয়া হইল। $\overline{PQ}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle APQ$ এবং $\triangle DEF$-এর $\overline{AP} \cong \overline{DE}$, $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$

এবং $\angle PAQ \cong \angle EDF$. $\therefore$ $\triangle APQ \cong \triangle DEF$



$\therefore$ $\angle APQ \cong \angle DEF$ এবং $\angle AQP \cong \angle DFE$

এখন, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; $\therefore$ $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$,

$\therefore$ $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$.

$\therefore$ $\angle ABC \cong \angle APQ \cong \angle DEF$ এবং $\angle ACB \cong \angle AQP \cong \angle DFE$

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী। $\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশ।

অনুশীলনী 8

1. $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ বাহুর উপর যথাক্রমে X ও Y দুইটি বিন্দু। যদি $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, $AX=4$ সে. মি. এবং $BX=3$ সে. মি. হয় তবে (i) $AY : YC$; (ii) $AC : AY$ এবং (iii) ($\triangle AXY$-এর ক্ষেত্রফল) : ($\triangle BYC$-এর ক্ষেত্রফল)-এর মান নির্ণয় কর।

2. $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. এবং O উহার মধ্যবিন্দু। যদি P এবং Q বিন্দু AB-কে যথাক্রমে অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থভাবে 7 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে, $OP.\ OQ=OB^2$.

3. যখন 5 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি গাছের ছায়া 9 ফুট হইল তখন অপর একটি গাছের ছায়া 45 ফুট হইয়াছে দেখা গেল। দ্বিতীয় গাছটির দৈর্ঘ্য কত?

[Ans. 25 ফুট]

4. $\overline{XY} \perp \overline{BX}$ এবং A, $\overline{BX}$-এর উপরিস্থিত একটি বিন্দু। $\overline{YA}$-কে বর্ধিত করাতে উহা B বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বের সহিত C বিন্দুতে মিলিত হইল।

$AX=120$ মি., $AB=3$ মি. এবং $BC=4$ মি. হইলে $\overline{XY}$-এর দৈর্ঘ্য কত?

[Ans. 160 মি.]

5. $\triangle PQR$-এর $\overline{QR}$ বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা $\overline{PQ}$-কে X এবং $\overline{PR}$-কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $PX=3{\cdot}6$ সে.মি., $PQ=5{\cdot}6$ সে.মি., $YR=1{\cdot}4$ সে.মি. এবং $QR=8{\cdot}4$ সে.মি. হয়, তবে $\overline{PY}$ এবং $\overline{XY}$-এর দৈর্ঘ্য কত?

6. ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং উহার অর্ধেক।

7. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা দুইটি উহাদের যে-কোন দুইটি অনুরূপ বাহুর সমানুপাতী।

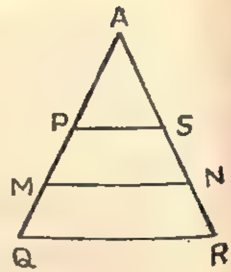
8. তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোন দুইটি ভেদক-কে সমানুপাতে ছেদ করে।

9. ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাংশ উহার সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল হইবে।

স্বীকার : PQRS ট্রাপিজিয়ামের $\overline{PQ}$ এবং $\overline{SR}$ তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু দুইটি যথাক্রমে M এবং N.

প্রামাণ্য বিষয় : $\overline{MN} \parallel \overline{PS}$ এবং $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$.

অঙ্কন : $\overline{QP}$ এবং $\overline{RS}$-কে বর্ধিত করাতে উহারা পরস্পর A বিন্দুতে মিলিত হইল।



প্রমাণ : $\triangle AQR$-এর $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$.

$\therefore \quad \dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{AS}{SR} \quad \cdots \quad$ (i)

এখন, $PQ = 2\,PM$

এবং $SR = 2\,SN$ (স্বীকার)।

$\therefore \quad \dfrac{AP}{2\,PM} = \dfrac{AS}{2\,SN}$ [(i) হইতে]

$\therefore \quad \dfrac{AP}{PM} = \dfrac{AS}{SN}. \quad \therefore \quad \triangle AMN$-এর $\overline{MN} \parallel \overline{PS}$.

কিন্তু $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$. [ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল বাহুদ্বয়]

$\therefore \quad \overline{MN} \parallel \overline{QR}$.

10. $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশ দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে, $AO : OB = CO : OD$; যদি R এবং S যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-এর মধ্যবিন্দু হয় তবে দেখাও যে $\overline{RS}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$-এর সমান্তরাল হইবে।

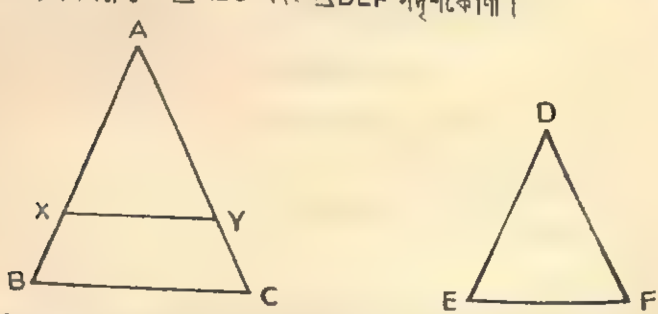
11. $\triangle ABC$-এর $\overline{AD}$ মধ্যমাটির মধ্যবিন্দু E ; $\overline{BE}$ অঙ্কন করিয়া বর্ধিত করাতে উহা $\overline{AC}$-কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, $AF = \frac{1}{3}\,AC$.

12. ABCD ট্রাপিজিয়মের $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ এবং উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $OA : OC = OB : OD$.

13. $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\angle A \cong \angle D$ এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ হইলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

স্বীকার : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\angle A \cong \angle D$ এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।



অঙ্কন : $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহু হইতে যথাক্রমে $\overline{AX}$ এবং $\overline{AY}$ এরূপে কাটিয়া লওয়া হইল যেন $\overline{AX} \cong \overline{DE}$ এবং $\overline{AY} \cong \overline{DF}$ হয়। $\overline{XY}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ ঃ $\triangle AXY$ এবং $\triangle DEF$-এর $\overline{AX} \cong \overline{DE}$, $\overline{AY} \cong \overline{DF}$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A \cong$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$. $\therefore$ $\triangle AXY \cong \triangle DEF$.

$\therefore$ $\angle AXY \cong \angle DEF$ এবং $\angle AYX \cong \angle DFE$.

আবার $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; $\therefore$ $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$.

$\overline{XY} \parallel \overline{BC}$.

$\therefore$ $\angle AXY \cong \angle ABC$. (অনুরূপ কোণ)

এবং $\angle AYX \cong \angle ACB$. (" ")

$\therefore$ $\angle ABC \cong \angle DEF$ এবং $\angle ACB \cong \angle DFE$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

14. দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পরকে সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

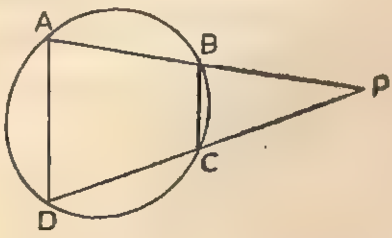
15. দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির অনুরূপ বাহুগুলির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

16. দেখাও যে, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধদ্বয় উহাদের অনুরূপ বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী।

17. ABCD বৃত্তীয় চতুর্ভুজের $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ বাহুকে বর্ধিত করাতে উহার বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল। দেখাও যে, $PB : PD = PC : PA$.

স্বীকার ঃ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। উহার $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ বাহুকে বর্ধিত করাতে উহারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $PB : PD = PC : PA$.



প্রমাণ ঃ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া, $\angle BAD$-এর পরিমাপ + $\angle BCD$-এর পরিমাপ $= 180^\circ$;

কিন্তু $\angle BCD$-এর পরিমাপ + $\angle BCP$-এর পরিমাপ $= 180^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAD$-এর পরিমাপ $=$ $\angle BCP$-এর পরিমাপ।

এখন $\triangle BPC$ এবং $\triangle APD$-এর মধ্যে $\angle BCP \cong \angle PAD$ এবং

$\angle BPC \cong \angle APD$; অতএব, ত্রিভুজদ্বয়ের অবশিষ্ট কোণদ্বয় পরস্পর সর্বসম।
$\therefore$ ΔBPC এবং ΔAPD সদৃশকোণী।

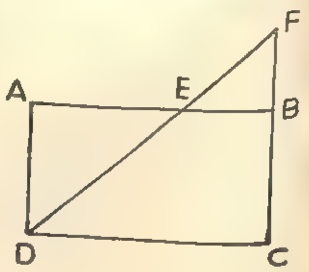
$\therefore$ $PB : PD = PC : PA.$

18. ABCD বৃত্তীয় চতুর্ভুজের $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AB.AD : CB.CD = OA : OC$

19. ABC ত্রিভুজের $\overline{AC}$ এবং $\overline{AB}$-এর উপর যথাক্রমে P এবং Q দুইটি বিন্দু। যদি $PA = 2PC$ এবং $QB = 3AQ$ এবং $\overline{BP}$ ও $\overline{CQ}$ রেখাংশদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $BQ = 7\ PQ.$

20. ABCD সামান্তরিকের D বিন্দু হইতে অঙ্কিত রেখাটি $\overline{AB}$ এবং বর্ধিত $\overline{CB}$-কে যাথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, $AD : AE = CF : CD.$

স্বীকার : ABCD সামান্তরিকের D বিন্দু হইতে অঙ্কিত রেখাংশটি $\overline{AB}$ এবং বর্ধিত $\overline{CB}$-কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



প্রামাণ্য বিষয় : $AD : AE = FC : CD.$

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBEF-এর মধ্যে $\angle AED \cong \angle BEF$ (বিপ্রতীপ কোণ) এবং $\angle ADE \cong \angle BFE$ (একান্তর কোণ) ;

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle DAE =$ অবশিষ্ট $\angle FBE$,

$\therefore$ ΔADE এবং ΔBFE সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{AE}{BE}$; অর্থাৎ, $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BF}{BE}$ ... ... (i)

আবার, ΔBEF এবং ΔCDF-এর মধ্যে

$\angle FEB \cong \angle FDC$ (অনুরূপ কোণ), $\angle DCF \cong \angle EBF$ (অনুরূপ কোণ) এবং $\angle BFE \cong \angle CFD.$

$\therefore$ ΔBEF এবং ΔCDF সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\dfrac{BF}{CF} = \dfrac{BE}{CD}$; অর্থাৎ $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{CF}{CD}$ ... ... (ii)

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{CF}{CD}.$

21. ABCD সামান্তরিকের C বিন্দু হইতে এরূপ একটি রেখাংশ অঙ্কন কর যাহা $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ এবং $\overline{AB}$-কে যথাক্রমে P, Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $CP^2 = PQ.PR$.

22. ACB এবং ADB ত্রিভুজদ্বয় উহাদের সাধারণ ভূমি $\overline{AB}$-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। $\overline{AB}$-এর উপরিস্থিত E বিন্দু হইতে $\overline{AC}$ এবং $\overline{AD}$-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা যথাক্রমে $\overline{BC}$-কে F বিন্দুতে এবং $\overline{BD}$-কে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{FG} \parallel \overline{CD}$.

23. $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুর উপর যথাক্রমে X এবং Y এরূপ দুইটি বিন্দু যে $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$; $\overline{BY}$ এবং $\overline{CX}$ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দু হইতে $\overline{CA}$-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা $\overline{CX}$-এর সহিত Z বিন্দুতে মিলিত হইলে দেখাও যে, $OX.OZ = OC^2$.

24. $\triangle PQR$-এর P কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক $\overline{QR}$-কে M বিন্দুতে এবং ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে N বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{NR}$ অঙ্কন করিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\frac{PQ}{PM} = \frac{PN}{PR}.$$

25. $\triangle ABC$-এর উচ্চতা AD ; যদি $AB^2 = BD.BC$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\angle BAC$ সমকোণ।

উপপাদ্য 14

একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করিলে লম্বটির উভয় পার্শ্বে উৎপন্ন ত্রিভুজ দুইটি সমগ্র ত্রিভুজটির সহিত সদৃশ এবং উহারা পরস্পর সদৃশ হইবে।

[If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpenicular are similar to the whole triangle and to one another.]

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$-এর সহিত সদৃশ ; এবং উহারা পরস্পর সদৃশ।

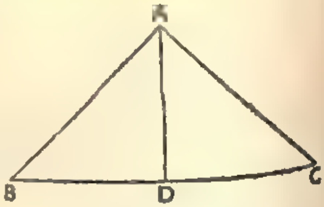
প্রমাণ ঃ ABC এবং ABD ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle BAC \cong \angle BDA$ (উভয়েই সমকোণ) এবং $\angle ABC \cong \angle ABD$ (সাধারণ কোণ)।

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BCA \cong$ অবশিষ্ট $\angle BAD$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABD$ সদৃশকোণী।

অর্থাৎ, উহারা সদৃশ।

অনুরূপে দেখান যায় যে, $\triangle ADC$ এবং $\triangle ABC$ সদৃশ।



$\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$-এর সহিত সদৃশ। অর্থাৎ, $\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$ পরস্পর সদৃশ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ হইলে (i) $AB^2 = BD.BC$ এবং (ii) $AC^2 = CD.BC$ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ প্রমাণ কর যে $AD^2 = BD\ CD$.

স্বীকার ঃ $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. [উপরের উপপাদ্যটির চিত্র দেখ।]

প্রামাণ্য বিষয় ঃ $AD^2 = BD.CD$.

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABD$-এর মধ্যে, $\angle BAC \cong \angle BDA$ এবং $\angle ABC \cong \angle ABD$; অতএব, $\angle BCA \cong \angle BAD$.

এখন $\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$-এর মধ্যে, $\angle ADB \cong \angle ADC$ (সমকোণ), $\angle BAD \cong \angle DCA$;

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ABD \cong$ অবশিষ্ট $\angle DAC$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। অর্থাৎ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore$ $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$; $\therefore$ $AD^2 = BD.CD$.

4. 5. মধ্যসমানুপাতী (Mean Proportional) ঃ মনে কর, a, b, c তিনটি সমজাতীয় রাশি। এখন যদি ঐ রাশি তিনটি ক্রমিক অনুপাতে থাকে তবে $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ হইবে। এক্ষেত্রে b-কে a ও c-এর মধ্যসমানুপাতী (Mean Proportional) বলে।

$\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ হইলে $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$ হইবে।

[অনুসিদ্ধান্ত (2)]

অতএব এক্ষেত্রে AD, BD এবং CD-এর মধ্যসমানুপাতী হইবে। এখানে, $\triangle ABC$-এর অতিভুজ $\overline{BC}$ এবং $BC = BD + CD$; অতএব বলা যাইতে পারে যে, কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য অতিভুজটির অংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী হইবে।

বিঃ দ্রঃ যদি AD, BD এবং CD-এর মধ্যসমানুপাতী হয় তবে বলা হইবে যে $\overline{AD}$ রেখাংশটি, $\overline{BD}$ এবং $\overline{CD}$ রেখাংশদ্বয়ের মধ্যসমানুপাতী।

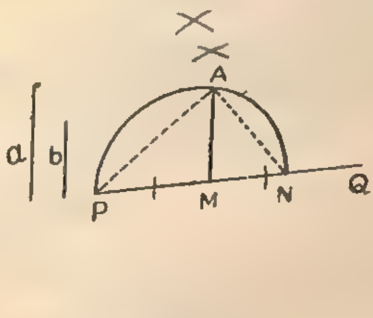
সম্পাদ্য 8

দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

[To construct the mean proportional between two given segments.]

মনে কর, নির্দিষ্ট রেখাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a এবং b ; উহাদের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{PQ}$ অঙ্কন কর যাহাতে $PQ > (a+b)$ হয়। এখন $\overline{PQ}$ হইতে $\overline{PM}$ এবং $\overline{MN}$ রেখাংশ দুইটি এরূপে কাটিয়া লওয়া হইল যেন $PM = a$ এবং $MN = b$ হয়। $\overline{PN}$-কে ব্যাস ধরিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হইল। $\overline{PN}$-এর M বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বটি উক্ত অর্ধ-বৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে $\overline{AM}$ রেখাংশই প্রদত্ত রেখাংশ দুইটির মধ্যসমানুপাতী হইবে।



প্রমাণ : $\overline{AP}$ এবং $\overline{AN}$ অঙ্কন কর।

ন $\angle PAN$ সমকোণ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)।

APN সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু A হইতে অতিভুজ $\overline{PN}$-এর অঙ্কিত লম্ব $\overline{AM}$; মনে কর, $AM = x$.

এখন $\triangle APM$ এবং $\triangle AMN$ সদৃশকোণী।

$\therefore \quad \dfrac{PM}{AM}=\dfrac{AM}{MN}$;

$\therefore \quad \dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}$; অর্থাৎ x, a এবং b-এর মধ্যসমানুপাতিক হইবে।

অনুশীলনী 9

1. $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$; যদি $AB=15$ সে. মি. এবং $BC=17$ সে. মি. হয় তবে $\overline{BD}$ এবং $\overline{CD}$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. $\triangle PQR$-এর $\angle P$ সমকোণ এবং $\overline{PM} \perp \overline{QR}$; যদি $PR=5$ সে. মি. এবং $QR=13$ সে. মি. হয়, তবে $\overline{PM}$-এর দৈর্ঘ্য কত?

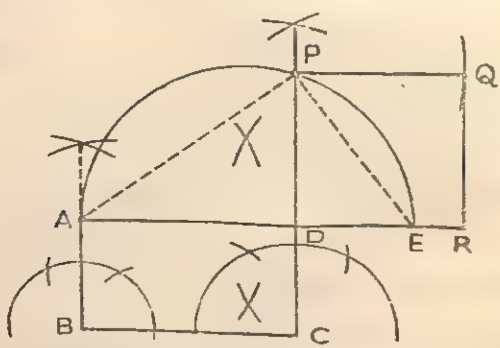
3. কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{BC}$ এবং A বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ টানা হইল। প্রমাণ কর যে, $AB.AC=BC\ AP$.

4. DEF ত্রিভুজের $\angle D$ সমকোণ। DN ত্রিভুজটির উচ্চতা। দেখাও যে, $DE^2 : DF^2=EN : FN$.

5. 2 সে. মি. এবং 3 সে. মি. দৈর্ঘ্যের রেখাংশ দুইটির মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

6. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

মনেকর, ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র। উহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।



অঙ্কন : ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AD}$ বাহুকে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে $\overline{CD}$-এর সর্বসম করিয়া DE রেখাংশ কাটিয়া লওয়া হইল।

$\overline{AE}$-কে ব্যাস ধরিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হইল। $\overline{CD}$-কে বর্ধিত করাতে উহা অর্ধবৃত্তটিকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিল। DPQR বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে, DPQR বর্গক্ষেত্রই নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ ঃ $\overline{PA}$ এবং $\overline{PE}$ অঙ্কন করা হইল।

এখন $\angle APE$ সমকোণ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)।

$\therefore$ $\triangle APE$-এর $\angle APE$ সমকোণ এবং $\overline{PD} \perp \overline{AE}$.

$\therefore$ $\triangle PAD$ এবং $\triangle PDE$ সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\dfrac{PD}{DE} = \dfrac{AD}{PD}$

$\therefore$ $PD^2 = AD.DE$

$= AD.CD \quad (\because \overline{DE} \cong \overline{CD})$

$\therefore$ DPQR বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

7. 2·5 সে.মি. এবং 3·5 সে. মি. বাহুযুক্ত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

8. $\triangle PQR$-এর উচ্চতা PN এবং $\angle QPR$ সমকোণ ; যদি $\overline{QR}$ বাহুর মধ্যবিন্দু M হয় তবে দেখাও যে, $PN^2 = MR^2 - MN^2$

9. $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\angle A \cong \angle D$; প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$.

10. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle P$ সমকোণ এবং $\overline{PS} \perp \overline{QR}$; যদি $PR = 2PQ$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $QS : SR = 1 : 4$.

11. $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$; যদি $AB : BC = 1 : 3$ হয় তবে BD : CD-এর মান নির্ণয় কর। [Ans. 1 : 8]

পঞ্চম অধ্যায়

পীথাগোরাসের উপপাদ্য

পূর্ববর্তী শ্রেণীতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটির পরীক্ষামূলক প্রমাণ দেখান হইয়াছে। উক্ত পরীক্ষায় ইহাই প্রমাণিত হইয়াছে যে $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ হইলে অতিভুজ $\overline{BC}$-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\overline{AB}$ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+\overline{CA}$-বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল; অর্থাৎ, $BC^2=AB^2+CA^2$ হইবে। এক্ষেত্রে উপপাদ্যটির ঔপপত্তিক প্রমাণ দেওয়া হইল।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান।

[The square on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides.

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ। এখানে $BC=a$, $CA=b$ এবং $AB=c$ ধরা হইল।

প্রামাণ্য বিষয় : $BC^2=CA^2+AB^2$

অর্থাৎ, $a^2=b^2+c^2$.

অঙ্কন : $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর উপর যথাক্রমে BCDE, CAGF এবং ABPQ বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কন করা হইল। $\overline{AM}\perp\overline{DE}$ টানা হইল; $\overline{AM}$, $\overline{BC}$ বাহুকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{PC}$ এবং $\overline{AE}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\angle QAC$-এর পরিমাপ $=\angle QAB$-এর পরিমাপ $+\angle BAC$-এর পরিমাপ $=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

$\therefore$ Q, A এবং C একই রেখাংশের উপর অবস্থিত।

আবার $\angle ABE$-এর পরিমাপ $=\angle ABC$-এর পরিমাপ $+90^\circ$

$=\angle PBC$-এর পরিমাপ।

$\therefore$ $\triangle ABE$ এবং $\triangle PBC$-এর মধ্যে; $\overline{AB}\cong\overline{PB}$, $\overline{BE}\cong\overline{BC}$

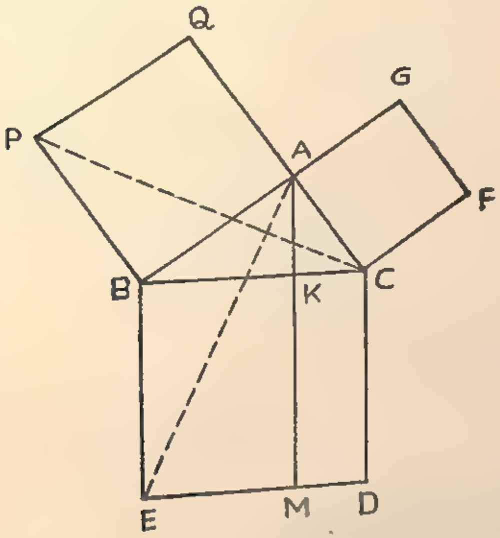
এবং $\angle ABE\cong\angle PBC$. $\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle PBC$.

এখন ABPQ বর্গক্ষেত্র এবং $\triangle PBC$ উভয়েই একই ভূমি $\overline{PB}$-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল $\overline{PB}$ ও $\overline{QC}$-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ ABPQ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2$ $\triangle$PBC-এর ক্ষেত্রফল।

অনুরূপ BKME আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2$ $\triangle$ABE-এর ক্ষেত্রফল

[উহারা একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া]



∴ ABPQ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ BKME আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অনুরূপে $\overline{AD}$ এবং $\overline{FB}$ অঙ্কন করিয়া দেখান যায় যে,

CAGF বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ KMDC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

∴ ABPQ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ CAGF বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=$ BKME আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ KMDC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=$ BCDE বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

∴ $AB^2 + CA^2 = BC^2$

∴ $c^2 + b^2 = a^2$; অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$.

বিকল্প পদ্ধতি :

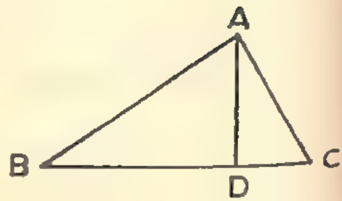
স্বীকার : ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$ সমকোণ। ইহার $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$ ধরা হইল।

প্রামাণ্য বিষয় : $BC^2 = CA^2 + AB^2$

অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$.

অঙ্কন : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ অঙ্কন করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABD$-এর মধ্যে,



$\angle BAC \cong \angle ADB$ (সমকোণ)

এবং $\angle ABC \cong \angle ABD$;

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACB \cong$ অবশিষ্ট $\angle BAD$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$;

$BC.\ BD = AB^2$ ... ... (i)

আবার $\triangle ABC$ এবং $\triangle ACD$-এর মধ্যে,

$\angle BAC \cong \angle ADC$ (সমকোণ) এবং $\angle ACB \cong \angle ACD$;

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ABC \cong$ অবশিষ্ট $\angle DAC$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ; $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

অর্থাৎ, $BC.\ DC = AC^2$ ... ... (ii)

এখন { (i)+(ii) } করিয়া,

$BC.\ BD + BC.\ DC = AB^2 + AC^2$

$\therefore$ $BC\ (BD + DC) = AB^2 + AC^2$

$\therefore$ $BC.\ BC = AB^2 + AC^2$

$\therefore$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\therefore$ $a^2 = b^2 + c^2$.

উপপাদ্য 15

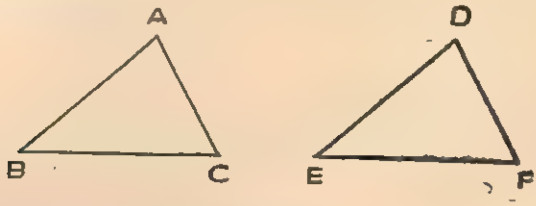
কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান হইলে, শেষোক্ত বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হইবে।

[If the square on one side of a triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides then these two sides contain a right angle.]

স্বীকার : $\triangle ABC$ এর $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle BAC$ সমকোণ।

অঙ্কন : এরূপ একটি ত্রিভুজ DEF অঙ্কন করা হইল যাহার $\overline{DE} \cong \overline{AB}$, $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ এবং $\angle EDF$ সমকোণ হয়।



প্রমাণ : $\triangle DEF$-এর $\angle EDF$ সমকোণ।

$\therefore \quad EF^2 = DE^2 + DF^2$

$= AB^2 + AC^2$ (অঙ্কন)

$= BC^2$ (স্বীকার)।

$\therefore \quad \overline{EF} \cong \overline{BC}.$

$\therefore \quad \triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর মধ্যে,

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ এবং $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF.$

$\therefore \quad \angle EDF \cong \angle BAC.$

অতএব, $\angle BAC$ সমকোণ। ($\because \quad \angle EDF$ সমকোণ।)

অনুশীলনী 10

1. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 39 সে. মি. এবং অপর দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 21 সে. মি. ; ত্রিভুজটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

[Ans. 90 সে. মি.]

2. দেখাও যে কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

3. $\triangle ABC$-এর $\angle B$ সমকোণ এবং D, $\overline{BC}$-এর উপরিস্থিত একটি বিন্দু। যদি $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ এবং $\overline{AC}$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে. মি., 10 সে.মি. এবং 17 সে.মি. হয় তবে $\overline{DC}$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Ans. 9 সে. মি.]

4. দেখাও যে কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল মূল বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

5. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ কর্ণ। প্রমাণ কর যে

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2.$$

6. $\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ। $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-এর উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

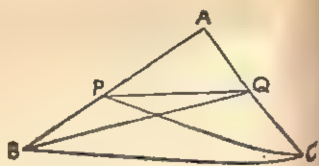
$$BQ^2+CP^2=BC^2+PQ^2.$$

স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ। $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহুর উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু।

প্রামাণ্য বিষয় : $BQ^2+CP^2=BC^2+PQ^2$

প্রমাণ : $\triangle APQ$-এর $\angle A$ সমকোণ ;

$\therefore\ PQ^2=AP^2+AQ^2 \quad \cdots \quad \cdots$(i)



$\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ ;

$\therefore\ BC^2=AB^2+AC^2 \quad \cdots \quad \cdots$(ii)

$\triangle BAQ$-এর $\angle A$ সমকোণ ;

$\therefore\ BQ^2=AB^2+AQ^2 \quad \cdots \quad \cdots$(iii)

$\triangle PAC$-এর $\angle A$ সমকোণ ;

$\therefore\ CP^2=AC^2+AP^2 \quad \cdots \quad \cdots$(iv)

এখন { (iii)+(iv) } করিয়া,

$$BQ^2+CP^2=(AB^2+AC^2)+(AQ^2+AP^2)$$
$$=BC^2+PQ^2 \text{ [(ii) এবং (i) হইতে]}$$

7. PQRS চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। যদি $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ এবং $\overline{SP}$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c এবং d হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$$a^2+c^2=b^2+d^2.$$

8. ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ O একটি বিন্দু। $\overline{OX}\perp\overline{BC}$, $\overline{OY}\perp\overline{CA}$ এবং $\overline{OZ}\perp\overline{AB}$ টানা হইল। যদি $\overline{AZ}$, $\overline{BX}$, $\overline{CY}$, $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$ এবং $\overline{CX}$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c, p, q এবং r হয় তবে দেখাও যে, $a^2+b^2+c^2=p^2+q^2+r^2$.

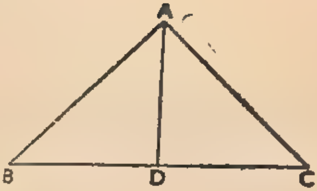
9. $\triangle ABC$-এর A শীর্ষবিন্দু হইতে $\overline{BC}$-এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব টানা হইল। যদি $AD^2=BD.DC$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\angle BAC$ সমকোণ।

স্বীকার : $\angle ABC$-এর $AD\perp BC$ এবং $AD^2=BD.DC$.

প্রামাণ্য বিষয় : $\angle BAC$ সমকোণ।

প্রমাণ : $\triangle ABD$-এর $\angle ADB$ সমকোণ ;

$AB^2 = BD^2 + AD^2$ ··· ···(i)



$\triangle ADC$-এর $\angle ADC$ সমকোণ ;

$AC^2 = DC^2 + AD^2$··· ··· (ii)

এখন {(i)+(ii)} করিয়া,

$AB^2 + AC^2 = BD^2 + DC^2 + 2AD^2$

$= BD^2 + DC^2 + 2BD.DC$

$= (BD + DC)^2 = BC^2$.

∴ ABC-এর $\angle BAC$ সমকোণ।

10. $\triangle ABC$-এর $\angle ABC$ সমকোণ এবং $\overline{BD} \perp \overline{AC}$; যদি $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{BD}$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c এবং p হয় তবে প্রমাণ কর যে, (i) $pb = ac$ এবং (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

11. $\triangle ABC$-এর $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ এবং O, $\overline{BC}$-এর মধ্যবিন্দু। দেখাও যে,
$AB^2 - AC^2 = 2BC.OD$.

12. $\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ এবং $\overline{BC}$-এর মধ্যবিন্দু D ; প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

13. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির চারগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণের সমান—প্রমাণ কর।

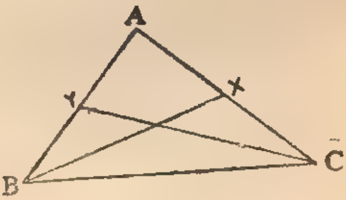
স্বীকার : $\triangle ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ। $\overline{BX}$ এবং $\overline{CY}$ মধ্যমা।

অর্থাৎ, $2AY = AB$ এবং $2AX = AC$.

প্রামাণ্য বিষয় : $4(BX^2 + CY^2) = 5BC^2$

প্রমাণ : $\triangle ABC$-এর $\angle BAC$ সমকোণ ;

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ··· ···(i)



$\triangle ABX$-এর $\angle BAX$ সমকোণ ;

∴ $BX^2 = AB^2 + AX^2$

$\triangle AYC$-এর $\angle CAY$ সমকোণ ;

∴ $CY^2 = AC^2 + AY^2$

$$\therefore \quad 4(BX^2+CY^2)=4AB^2+4AX^2+4AC^2+4AY^2$$
$$=4(AB^2+AC^2)+(2AX)^2+(2AY)^2$$
$$=4BC^2+AC^2+AB^2 \quad [\text{(i) হইতে}]$$
$$=4BC^2+BC^2=5BC^2.$$

14. দেখাও যে সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের চার গুণ, উহার যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিন গুণের সমান।

15. ABCD আয়তক্ষেত্রের অন্তঃস্থ বিন্দু M-এর সহিত A, B, C এবং D বিন্দুকে যুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.

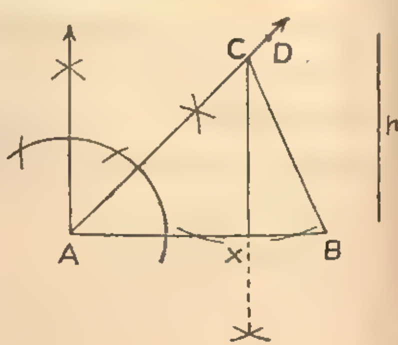
16. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত কর, যেন উহার এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর অংশটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়।

17. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফলের অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

18. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

মনে কর, $\overline{AB}$ একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ এবং h, প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। এখানে $AB > h$.

অঙ্কন: $\overline{AB}$ রেখাংশকে A-বিন্দুতে $\angle BAD$ এরূপে অঙ্কন করা হইল যেন $\angle BAD$-এর পরিমাপ $=45°$ হয়। এখন B-কে কেন্দ্র করিয়া h-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কন করাতে উহা $\overrightarrow{AD}$-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{CX} \perp \overline{AB}$ টানা হইল। তবে X-বিন্দুই $\overline{AB}$-কে নির্দিষ্ট দুইটি অংশে বিভক্ত করিবে।



প্রমাণ: $\overline{BC}$ অঙ্কন করা হইল।

$\triangle AXC$-এর $\angle AXC$ সমকোণ এবং $\angle CAX$-এর পরিমাপ $=45°$;

$\therefore \quad \overline{AX} \cong \overline{CX}.$

আবার $\triangle BCX$-এর $\angle BXC$ সমকোণ ;

$\therefore \quad BC^2 = CX^2 + BX^2.$

এখন $AX^2 + BX^2$

$= CX^2 + BX^2 = BC^2 = h^2.$

19. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য উহার লম্বের দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{3}$ অংশ অপেক্ষা 3 সে. মি. বেশী এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য লম্বের দৈর্ঘ্যের $\frac{6}{5}$ অংশ অপেক্ষা 1 সে. মি. কম। লম্বটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [Ans. 15 সে. মি.]

20. $\triangle ABC$-এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ এবং $\angle BAC$-এর পরিমাপ $= 120^\circ$; দেখাও যে, $BC^2 = 3AB^2$.

21. দুইটি রাস্তার সংযোগস্থলে কোণের পরিমাপ 120° ; সংযোগস্থল হইতে দুই জন পথিক একই সময়ে যথাক্রমে 4 কি. মি./ঘণ্টা এবং 5 কি. মি./ঘণ্টা বেগে প্রতি রাস্তায় একজন করিয়া রওনা হইল। দুই ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত হইবে ? [Ans. 15·62 কি. মি. (প্রায়)]

পরিমিতি

(Mensuration)

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

1. (a) **বর্গক্ষেত্র :** কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গএকক এবং পরিসীমা $= 4a$ একক।

(b) **আয়তক্ষেত্র :** কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a একক এবং প্রস্থ b একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ $= ab$ বর্গএকক এবং পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) $= 2(a+b)$ একক।

(c) **সামান্তরিক :** কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = (সামান্তরিকটির সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব × উক্ত বাহুদ্বয়ের একটির দৈর্ঘ্য) ; যদি সামান্তরিকের ভূমির দৈর্ঘ্য a একক এবং উচ্চতা h একক হয় তবে উহার ক্ষেত্রফল = ভূমির দৈর্ঘ্য × উচ্চতা $= ah$ বর্গএকক। ভূমির সন্নিহিত বাহু দুইটির যে কোনটির দৈর্ঘ্য c একক হইলে সামান্তরিকের পরিসীমা $= 2(a+c)$ একক।

উদা. 1. কোন আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 240 মিটার ; ইহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত 5 : 3 হইলে ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

উঃ মনে কর, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য $= 5x$ মিটার এবং প্রস্থ $= 3x$ মিটার।

∴ আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $= 2(5x + 3x)$ মিটার $= 16x$ মিটার।

শর্তানুসারে,

$$16x = 240 \quad \therefore \quad x = 15$$

এখন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 5x$ মিটার $\times\ 3x$ মিটার

$= 5.15 \times 3.15$ বর্গমিটার

$= 3375$ বর্গমিটার।

উদা. 2. কোন সামান্তরিকের ভূমির দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং উচ্চতা 8 মিটার ভূমির সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 10 মিটার হইলে সামান্তরিকটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

উঃ। সামান্তরিকের ভূমির সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। মনে কর, ইহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=x$ মিটার।

শর্তানুসারে, $10\times x=12\times 8$

$x=9{\cdot}6$

$\therefore$ সামান্তরিকটির ভূমির সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের একটির দৈর্ঘ্য $=9{\cdot}6$ মিটার।

$\therefore$ সামান্তরিকটির পরিসীমা $=2(12+9{\cdot}6)$ মিটার $=43{\cdot}2$ মিটার।

2. (a) **ত্রিভুজ ঃ** (i) কোন ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য a একক এবং উচ্চতা b একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমির দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}ab$ বর্গ একক।

(ii) কোন ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c হইলে উহার পরিসীমা $=(a+b+c)$; যদি ত্রিভুজের পরিসীমাকে $2s$ ধরা হয় তবে $2s=(a+b+c)$। অতএব, ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ একক।

এক্ষেত্রে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গএকক।

(iii) কোন সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$ বর্গএকক।

(iv) সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল।

উদা. 3. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 17 সে. মি., 15 সে. মি. এবং 8 সে. মি.। উহার বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে উক্ত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, $a=17$ সে. মি., $b=15$ সে. মি. এবং $c=8$ সে. মি.।

$\therefore\ s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{17+15+8}{2}$ সে. মি. $=20$ সে. মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গএকক।

$=\sqrt{20(20-17)(20-15)(20-8)}$ বর্গ সে. মি.

$=\sqrt{20.\ 3.\ 5.\ 12}$ বর্গ সে. মি. $=60$ বর্গ সে. মি.

এক্ষেত্রে ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য $=17$ সে. মি.; মনে কর, উক্ত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=x$ সে. মি.

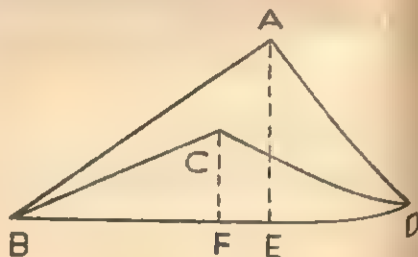
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 17\times x$ বর্গ সে. মি. $=\frac{17x}{2}$ = বর্গ সে. মি.

শর্তানুসারে, $\frac{17x}{2}=60 \quad \therefore \quad x=7\frac{1}{17}$

$\therefore$ লম্বটির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=7\frac{1}{17}$ সে. মি.।

উদা. 4. কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ চতুর্ভুজটির চিত্রের বাহিরে অবস্থিত। কর্ণটির দৈর্ঘ্য 30 গজ এবং অপর কৌণিক বিন্দু দুইটি হইতে উহার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যের অন্তর 40 গজ। চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের $\overline{BD}$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $=30$ গজ। এখানে $\overline{BD}$ কর্ণের উপর A এবং C বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে $\overline{AE}$ এবং $\overline{CF}$.



মনে কর, $CF=x$ গজ এবং $AE=(x+40)$ গজ।

$\therefore$ $\triangle ABD$-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}BD.\ AE$

$=\frac{1}{2}\times 30\times(x+40)$ বর্গগজ।

$=(15x+600)$ বর্গগজ।

আবার $\triangle BDC$-এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\ BD\times CF$

$=\frac{1}{2}\times 30\times x$ বর্গগজ

$=15x$ বর্গগজ।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$=\triangle ABC$-এর ক্ষেত্রফল $-$ $\triangle BDC$-এর ক্ষেত্রফল।

$=(15x+600-15x)$ বর্গগজ $=600$ বর্গগজ।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=600$ বর্গগজ।

(b) **রম্বস :** কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p একক এবং q একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\ pq$ বর্গএকক।

ট্রাপিজিয়াম : কোন ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a একক এবং b একক। যদি সমান্তরাল বাহু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব h একক হয় তবে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয় মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{1}{2}(a+b)h$ বর্গএকক।

উদা. 5. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 60 সে. মি এবং 40 সে.মি। উহার ক্ষেত্রফল এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয় $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$; উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। [চিত্র নিজে আঁক]

এখানে AC = 60 সে.মি. এবং BD = 40 সে.মি.

$\therefore$ ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 60$ সে.মি. $\times 40$ সে মি $= 1200$ ব.সে.মি.

আবার AO = 30 সে. মি, এবং OB = 20 সে.মি. ;

মনে কর, AB = x সে.মি.।

এখন $\triangle AOB$-এর $\angle AOB$ সমকোণ।

$\therefore \quad AB^2 = AO^2 + OB^2$

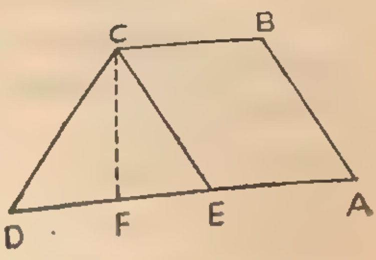
বা, $x^2 = (30)^2 + (20)^2 = 1300$

$\therefore \quad x = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} = 36{\cdot}05$

$\therefore$ রম্বসটির বাহুর দৈর্ঘ্য = 36·05 সে.মি.

উদা. 6. ABCD ট্রাপিজিয়ামের $\overline{BC}$ বাহু এবং $\overline{AD}$ বাহু পরস্পর সমান্তরাল। ইহার $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 সে. মি., 11 সে.মি., 15 সে.মি. এবং 25 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উঃ এখানে AB = 13 সে.মি., BC = 11 সে.মি, CD = 15 সে. মি. এবং DA = 25 সে. মি.।



$\overline{AB}$ বাহুর সমান্তরাল করিয়া $\overline{EC}$ রেখাংশ টানা লইল।

আবার C বিন্দু হইতে $\overline{DA}$ বাহুর উপর লম্ব $\overline{CF}$ টানা হইল।

এখন ABCE সামন্তরিকের ক্ষেত্রে EA = BC = 11 সে.মি.

এবং CE = AB = 13 সে.মি.।

$\therefore$ DE = DA − EA

= 25 সে.মি. − 11 সে.মি.

= 14 সে মি.।

∴ $\triangle DEC$-এর $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ এবং $\overline{EC}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15 সে.মি. 14 সে.মি. এবং 13 সে.মি.।

এখানে ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা $= s = \dfrac{15+14+13}{2}$ সে.মি. $= 21$ সে.মি.

∴ $\triangle DEC$-এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$ বর্গ সে.মি.

$= 84$ বর্গ সে.মি.

∴ $\frac{1}{2} DE \times CF = 84$ বর্গ সে.মি.

বা, $\frac{1}{2}$. 14 সে.মি $\times CF = 84$ বর্গ সে.মি.

∴ $CF = 12$ সে.মি.

এখন ABCD ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (BC + DA). CF

$= \frac{1}{2}$ (11. সে.মি. + 25 সে.মি.) $\times$ 12 সে.মি.

$= \frac{1}{2} \times 36$ সে.মি. $\times$ 12 সে.মি. $= 216$ বর্গ সে.মি.

3 **বৃত্ত ঃ** (i) কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হইলে উহার পরিধি $= 2\pi \times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 2\pi r$ একক ; বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ বৃত্তের পরিধি $\times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$ বর্গএকক $= \pi r^2$ বর্গএকক।

(ii) যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r এবং বৃত্তটির $\overset{\frown}{AB}$ চাপ উহার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাপ θ হয় তবে $\overset{\frown}{AB}$ চাপের দৈর্ঘ্য $= 2\pi r.\dfrac{\theta}{360}$ একক।

(iii) কোন বৃত্তাকার বলয়ের বাহিরের বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং ভিতরের বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে বৃত্তাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল $= (\pi R^2 - \pi r^2)$ বর্গএকক।

উদা. 7. একটি বৃত্তাকার মাঠকে বেষ্টন করিয়া একটি রাস্তা আছে ; রাস্তাটির ক্ষেত্রফল 1100 বর্গগজ। যদি রাস্তাটি 10 ফুট প্রশস্ত হয়, তবে বৃত্তাকার মাঠটির পরিধি নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$

উঃ মনে কর, বৃত্তাকার মাঠটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$ ফুট ;

∴ রাস্তাসহ মাঠটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= (r+10)$ ফুট।

এখন, রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল − মাঠের ক্ষেত্রফল

$= [\pi (r+10)^2 - \pi r^2]$ বর্গ ফুট

$= \pi [r^2 + 20r + 100 - r^2]$ বর্গফুট

$= \pi [20r + 100]$ বর্গফুট।

আবার রাস্তার ক্ষেত্রফল $= 1100$ বর্গগজ $= 1100 \times 9$ বর্গফুট

$\therefore \quad \pi(20r + 100) = 1100 \times 9$

বা, $\frac{22}{7}\ (20r + 100) = 1100 \times 9$ বা, $20r + 100 = \dfrac{1100 \times 9 \times 7}{22} = 3150$

বা, $20r = 3050 \qquad \therefore \quad r = 152\cdot5$

$\therefore$ বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$ ফুট $= 2 \times \frac{22}{7} \times 152\cdot5$ ফুট $= 958\frac{4}{7}$ ফুট।

উদা. 8. এক ব্যক্তি দেখিলেন যে কোন বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বৃত্তাকার পথ ধরিয়া পার হইতে যে সময় লাগে, ক্ষেত্রটিকে সোজাসুজি মধ্যস্থল দিয়া পার হইতে তাহা অপেক্ষা 30 সেকেণ্ড সময় কম লাগে। যদি তাহার গতি ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার হয় তবে ক্ষেত্রটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার.

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য $= 2x$ মিটার এবং বৃত্তটির পরিধির অর্ধেক

$= \frac{1}{2} \times 2\pi x$ মিটার $= \pi x$ মিটার $= \dfrac{22x}{7}$ মিটার।

এখানে লোকটি 4000 মিটার পথ যায় 60 মিনিটে ;

$\therefore$ „ 1 „ „ „ $\dfrac{60}{4000}$ „ ।

$\therefore$ „ $2x$ „ „ „ $\dfrac{60 \times 2x}{4000}$ „

$\therefore$ „ $\dfrac{22x}{7}$ „ „ „ $\dfrac{60 \times 22x}{4000 \times 7}$ „ ।

শর্তানুসারে, $\dfrac{60 \times 22x}{4000 \times 7} - \dfrac{60 \times 2x}{4000} = \frac{1}{2}$ [$\because$ 30 সেকেণ্ড $= \frac{1}{2}$ মিনিট]

বা, $\dfrac{33x}{700} - \dfrac{3x}{100} = \frac{1}{2}$ বা, $\dfrac{33x - 21x}{700} = \frac{1}{2}$

বা, $12x = 350 \qquad \therefore \quad x = 29\frac{1}{6}$

$\therefore$ ক্ষেত্রটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= 29\frac{1}{6}$ মিটার।

প্রশ্নমালা 1

1. একটি আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 2 ; উহার পরিসীমা 190 মিটার হইলে ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 9. : 12 : 15 ; ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে কি ?

3. 30 মিটার দীর্ঘ একটি মেঝেকে কার্পেট দিয়া আবৃত করিতে 150 টাকা খরচ হয়, কিন্তু উহার প্রস্থ 5 মিটার কম হইলে খরচ 120 টাকা হইত। মেঝের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 8 মিটার এবং উচ্চতা 4 মিটার। প্রতি বর্গ ডেসিমিটার 5 পয়সা হিসাবে উহার চারি দেওয়ালের ভিতরের দিকে রং করিতে 560 টাকা খরচ হইল। ঘরটির প্রস্থ কত ?

5. দুইটি বর্গাকার জমির পরিসীমা যথাক্রমে 748 মিটার এবং 336 মিটার। ঐ জমি দুইটির সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট বর্গাকার জমির পরিসীমা নির্ণয় কর।

6. একটি সামান্তরিকের ভূমির দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 64 বর্গমিটার। সামান্তরিকটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার হইলে উহার মধ্যে অঙ্কিত বৃহত্তম আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ববাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 21 ফুট এবং উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 39 ফুট। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 ফুট, 14 ফুট এবং 15 ফুট। বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে 14 ফুট দৈর্ঘ্যের বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

9. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 9 : 10 : 11 ; উহার পরিসীমা 60 মিটার। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা যত মিটার উহার ক্ষেত্রফলও তত বর্গমিটার। সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

11. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 17·32 মিটার দৈর্ঘ্যের কর্ণ যুক্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [$\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ ধর]

12. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য c সে মি. এবং সমান দৈর্ঘ্যের বাহু দুইটির যে-কোন একটির দৈর্ঘ্য a সে.মি. ; দেখাও যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$ বর্গ সে মি.।

13. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 306 মিটার এবং সমান দৈর্ঘ্যের বাহু দুইটির প্রত্যেকটিই উহার ভূমির দৈর্ঘ্যের $\frac{5}{8}$ অংশ। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 মিটার, 16 মিটার এবং 20 মিটার। ঐ সমকোণী ত্রিভুজটিতে অঙ্কিত বৃহত্তম বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

15. কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 মিটার, 10 মিটার এবং 12 মিটার। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

16 ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12 এবং 5 মিটার। $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D ; ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং $\overline{AD}$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

17. কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ চতুর্ভুজটির বাহিরে অবস্থিত। যদি উহার দৈর্ঘ্য 70 সে.মি. এবং অপর কৌণিক বিন্দু দুইটি হইতে উহার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 16 সে.মি. হয় তবে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. একটি রম্বসের কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 গজ ও 8 গজ। উহার ক্ষেত্রফল উচ্চতা এবং বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. কোন রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য 36 মিটার এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 18 মিটার। উহার অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

20. কোন ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 1 মিটার এবং উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 মিটার। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}$ বর্গ মিটার হইলে উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

21. $12' \times 2'$ ক্ষেত্রফল-যুক্ত একটি আয়তক্ষেত্র হইতে সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট এরূপ একটি ট্রাপিজিয়ামকে কাটিয়া লওয়া হইল যে উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হয়। যদি ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{3}$ অংশ হয়, তবে সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

22. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 14 ফুট এবং 30 ফুট। যদি অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 12 ফুট এবং 19 ফুট হয় তবে ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

23. একজন আমিন ত্রিভুজাকৃতি একটি জমি মাপিয়া দেখিলেন যে জমিটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 24 মিটার, 7 মিটার এবং 25 মিটার। কিন্তু জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিবার সময় তিনি বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 মিটার, 27 মিটার

এবং 25 মিটার ধরিলেন। ইহাতে জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে তাহার শতকরা ত্রুটি কত হইল ?

বৃত্তঃ (π-এর মান উল্লেখ না থাকিলে, উহার মান $\frac{22}{7}$ ধরিবে।)

24. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাহিরের এবং ভিতরের প্রান্তের পরিধি যথাক্রমে 500 মিটার এবং 300 মিটার হইলে রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

25. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 ফুট এবং 8 ফুট। এরূপ একটি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যাহার ক্ষেত্রফল ঐ বৃত্ত দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

26. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া 12 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। ক্ষেত্রটির পরিধি 528 মিটার হইলে রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত ?

27. একটি বৃত্তাকার বলয়ের অন্তঃব্যাসার্দ্ধ 27 সে.মি. ; উহার অন্তঃপরিধি এবং বহিঃপরিধির মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল 1782 বর্গ সে.মি. হইলে বলয়টির বহিঃব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

28. একটি গাড়ীর সামনের এবং পিছনের চাকার পরিধি যথাক্রমে 4 ফুট 9 ইঞ্চি এবং 6 ফুট 4 ইঞ্চি। গাড়ীখানি কত দূর গেলে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা 250 বার অধিক ঘুরিবে ?

29. এক ব্যক্তি একটি বৃত্তাকার পথ পার হইবার জন্যে বৃত্তাকার পথে না গিয়ে সোজাসুজি উহার মধ্যস্থল দিয়া পার হইলেন। ইহাতে তাহার 2 মিনিট সময় কম লাগিল। যদি ঐ লোকটির বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার হয় তবে বৃত্তাকার পথটির পরিধি কত ?

30. কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সে.মি. ; বৃত্তটিতে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

31. একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9, 10 এবং 17 মিটার। ত্রিভুজটির পরিসীমার দৈর্ঘ্যের সমান পরিধি যুক্ত বৃত্তটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল অপেক্ষা কত বেশী হইবে ?

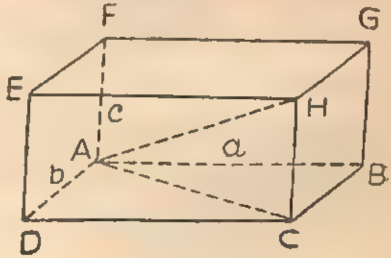
32. 100 মিটার এবং 102 মিটার ব্যাসার্দ্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তাকার পথ আছে। A, অন্তঃবৃত্তের পরিধির উপর দিয়া 1 মিনিট 30 সেকেণ্ডে এবং B বহিঃবৃত্তের পরিধির উপর দিয়া 1 মিনিট 32 সেকেণ্ডে একবার ঘুরিয়া আসিতে পারে। উহাদের গতিবেগের পার্থক্য নির্ণয় কর।

সমকোণী চৌপল

আমাদের চারিদিকে যে সকল বস্তু দেখিতে পাই তাহাদের আকৃতি ও প্রকৃতির মধ্যে বিভিন্নতা থাকিলেও উহাদের পরস্পরের সহিত একটি বিষয়ে সাদৃশ্য পরিলক্ষিত হয়। বস্তুমাত্রই কিছু না কিছু স্থান অধিকার করে। বস্তুর **আয়তন** (volume) বলিতে বস্তুটির দ্বারা অধিকৃত স্থানের পরিমাপকে বুঝায়। যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা আছে তাহাকে **ঘনবস্তু** বা **ঘন** (solid) বলে। প্রত্যেক ঘনবস্তুই এক বা একাধিক তলদ্বারা বেষ্টিত থাকে। কোন ঘনবস্তু সমতল দ্বারা বেষ্টিত হইলে ঘন বস্তুটিকে **বহুতলক** (Polyhedron) এবং সমতলগুলিকে উহার **তল** (faces) বলে। বহুতলকটির দুইটি সন্নিহিত তলের সাধারণ রেখাকে উহার **প্রান্তিকী** (edge) বলা হয়। প্রান্তিকীগুলির প্রত্যেকটি ছেদবিন্দুকে বহুতলকটির **শীর্ষবিন্দু** (Vertices) বলে। একই তলে অবস্থিত নয় এরূপ দুইটি শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিলে বহুতলকের **কর্ণ** (Diagonal) পাওয়া যায়।

চারিটি অপেক্ষা কম তল দ্বারা কোন বহুতলক গঠন করা যায় না। যে বহুতলকের মাত্র চারিটি তল থাকে তাহাকে **চতুস্তলক** (Tetrahedron) বলে। ছয়টি আয়তকার তলযুক্ত (bounded by rectangular faces) বহুতলককে **সমকোণী চৌপল** (Rectangular Parallelopiped) বলা হয়। সমকোণী চৌপলের তলগুলি বর্গাকার হইলে উহাকে **ঘনক** (Cube) বলে।

পার্শ্বের চিত্রের সমকোণী চৌপলটির আয়তকার তল ছয়টি যথাক্রমে ABCD, EFGH, ADEF, BCHG, DEHC এবং AFGB, এখানে A, B, C, D, E, F, G, H বিন্দুগুলির প্রত্যেকটিই উহার শীর্ষবিন্দু এবং $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AF}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{CH}$, $\overline{BG}$-এর প্রত্যেকটি রেখাংশই উহার প্রান্তিকী। আবার $\overline{DG}$, $\overline{BE}$, $\overline{AH}$ এবং $\overline{CF}$ রেখাংশের প্রত্যেকটিই সমকোণী চৌপলটির কর্ণ।



ABCD তলটিকে সমকোণী চৌপলটির ভূমি বলে। ভূমির যে কোন দুইটি সন্নিহিত বাহুর দীর্ঘতর বাহুটির দৈর্ঘ্যকে সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য এবং অপর বাহুটির দৈর্ঘ্যকে

ইহার প্রস্থ বলা হয়। এখানে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AD}$ প্রান্তিকী দুইটির দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ ধরিলে $\overline{AF}$-এর দৈর্ঘ্যকে উহার উচ্চতা বলা হইবে। মনে কর, $AB = a$ একক, $AD = b$ একক এবং $AF = c$ একক। সমকোণী চৌপলটির প্রান্তিকীগুলির মধ্যে $\overline{AB} \cong \overline{DC} \cong \overline{EH} \cong \overline{FG}$, $\overline{AD} \cong \overline{FE} \cong \overline{BC} \cong \overline{GH}$ এবং $\overline{AF} \cong \overline{DE} \cong \overline{BG} \cong \overline{CH}$. এখন সমকোণী চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ABCD-এর ক্ষেত্রফল $+$ EFGH-এর ক্ষেত্রফল $+$ ADEF-এর ক্ষেত্রফল $+$ BCHG-এর ক্ষেত্রফল $+$ DEHC-এর ক্ষেত্রফল $+$ AFGB-এর ক্ষেত্রফল

$= AB.AD + FG.FE + AD.AF + BC.BG + DC.DE + AB.AF$

$= (ab + ab + bc + bc + ac + ac)$ বর্গএকক।

$= (2ab + 2bc + 2ca)$ বর্গএকক।

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গএকক।

চিত্রে $\triangle ADC$-এর $\angle ADC$ সমকোণ,

$\therefore \quad AC^2 = DC^2 + AD^2 = (a^2 + b^2)$ বর্গএকক।

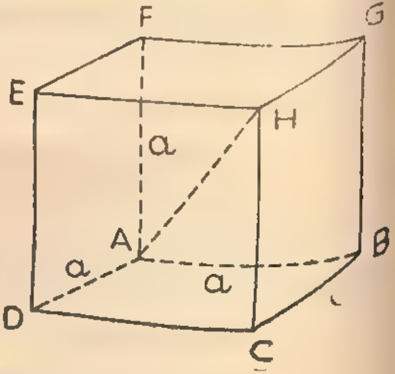
আবার $\triangle ACH$-এর $\angle ACH$ সমকোণ ;

$AH^2 = AC^2 + CH^2 = (a^2 + b^2 + c^2)$ বর্গএকক।

$\therefore \quad$ দৈর্ঘ্য $AH = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক।

$\therefore \quad$ সমকোণী চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক।

ঘনকের প্রত্যেকটি তল বর্গক্ষেত্র বলিয়া ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা সমান। মনে কর, কোন ঘনকের দৈর্ঘ্য a একক। তাহা হইলে উহার প্রত্যেকটি তলের ক্ষেত্রফল a^2 বর্গএকক হইবে।



অতএব ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6 \times$ উহার একটি তলের ক্ষেত্রফল

$= 6a^2$ বর্গএকক।

সমকোণী চৌপলের ন্যায় ঘনকের ক্ষেত্রেও দেখান যায় যে ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ একক $= \sqrt{3a^2}$ একক $= \sqrt{3}.a$ একক।

স্বীকার : কোন ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য a একক হইলে উহার আয়তন a^3 ঘন একক হইবে।

উপরোক্ত স্বীকার্যটির সাহায্যে দেখান যায় যে, কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক এবং উচ্চতা c একক হইলে সমকোণী চৌপলটির আয়তন= উহার ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) × উচ্চতা $= abc$ ঘন একক।

সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelpiped): সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক এবং উচ্চতা c একক হইলে,

(i) সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$ বর্গএকক।

(ii) সমকোণী চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক।

(iii) সমকোণী চৌপলের আয়তন $= abc$ ঘনএকক।

ঘনক (Cube): ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য a একক হইলে,

(i) ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গএকক।

(ii) ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$ একক।

(iii) ঘনকের আয়তন $= a^3$ ঘনএকক।

উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 9 মিটার, প্রস্থ 7 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

উঃ এখানে সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য $= a$ একক $= 9$ মিটার, প্রস্থ $= b$ একক $= 7$ মিটার, উচ্চতা $= c$ একক $= 5$ মিটার।

∴ সমকোণী চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$ বর্গএকক
$= 2[9.7+7.5+5.9]$ বর্গমিটার।
$= 286$ বর্গমিটার।

আবার সমকোণী চৌপলটির আয়তন $= abc$ ঘনএকক
$= 9.7.5$ ঘনমিটার।
$= 315$ ঘনমিটার।

উদা. 2. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত $6:5:4$ এবং উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 33,300 বর্গ সেন্টিমিটার। চৌপলটির আয়তন নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য $= a$ একক $= 6x$ সে. মি.

∴ প্রশ্নানুসারে, উহার প্রস্থ $= b$ একক $= 5x$ সে. মি. এবং উচ্চতা $= c$ একক $= 4x$ সে. মি.

$\therefore$ সমকোণী চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক

$= 2(6x.5x + 5x.4x + 4x.6x)$ বর্গ সে মি.

$= 2(30x^2 + 20x^2 + 24x^2)$ বর্গ সে মি.

$= 148x^2$ বর্গ সে. মি.

শর্তানুসারে, $148x^2 = 33,300$ বা, $x^2 = 225$ $\therefore$ $x = 15$

$\therefore$ $a = 6.15$ সে. মি. $= 90$ সে. মি., $b = 5.15$ সে. মি. $= 75$ সে. মি এবং $c = 4.15$ সে মি. $= 60$ সে. মি.।

$\therefore$ চৌপলটির আয়তন $= abc$

$= 90.75.60$ ঘন সে. মি.

$= 405000$ ঘন সে. মি.

উদা. 3. ধাতু-নির্মিত তিনটি নিরেট ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $1\frac{1}{2}$, 2 এবং $2\frac{1}{2}$ মিটার। ঘনক তিনটিকে গলাইয়া একটি নূতন নিরেট ঘনক তৈয়ারী করা হইলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হইবে?

উঃ মনে কর, নূতন ঘনকটির প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য $= a$ মিটার।

শর্তানুসারে, $(a$ মিটার $)^3 = (1\frac{1}{2}$ মিটার $)^3 + (2$ মিটার $)^3 + (2\frac{1}{2}$ মিটার $)^3$

বা, $a^3 = (\frac{3}{2})^3 + 8 + (\frac{5}{2})^3 = \frac{27}{8} + 8 + \frac{125}{8}$

$$= \frac{27+64+125}{8} = \frac{216}{8} = 27 = 3^3 \quad \therefore \quad a = 3$$

$\therefore$ নূতন ঘনকটির প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য $= 3$ মিটার

$\therefore$ ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6.a^2$ বর্গ মিটার

$= 6.3^2$ বর্গ মিটার

$= 54$ বর্গ মিটার।

উদা. 4. কোন সমকোণী চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি.। উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার সমষ্টি 80 সে. মি. হইলে চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য $= a$, প্রস্থ $= b$ এবং উচ্চতা $= c$

শর্তানুসারে,

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 10$ সে.মি. বা, $a^2+b^2+c^2 = 100$ বর্গ সে. মি. ... (i)

আবার, $a+b+c = 80$ সে. মি

বা, $(a+b+c)^2 = (80$ সে. মি. $)^2$

বা, $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 6400$ বর্গ সে. মি.

বা, 100 বর্গ সে.মি. $+2(ab+bc+ca)=6400$ বর্গ সে. মি. [(i) হইতে]

বা, $2(ab+bc+ca)=6300$ বর্গ সে. মি.

এখন সমকোণী চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=2(ab+bc+ca)$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=6300$ বর্গ সে. মি.

উদা. 5. একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 1·25 মিটার, 1·05 মিটার এবং 80 সে. মি.। বাক্সটি 2·5 সে. মি. পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী। 50 ঘন ডেসি মিটার কাঠের দাম 5 টাকা হইলে বাক্সটি তৈয়ারী করিতে কত টাকার কাঠ কিনিতে হইবে ?

উঃ এখানে বাক্সটির বাহিরের দৈর্ঘ্য $=1{\cdot}25$ মিটার $=125$ সে. মি,

প্রস্থ $=1{\cdot}05$ মিটার $=105$ সে. মি. এবং উচ্চতা $=80$ সে মি.।

$\therefore$ বাক্সটির বাহিরের আয়তন $=125\times105\times80$ ঘন সে. মি.

$$=\frac{125\times105\times80}{10\times10\times10} \text{ ঘন ডেসি মিটার}$$

$=1050$ ঘন ডেসি মিটার।

এখন বাক্সটি 2·5 সে. মি. পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী বলিয়া বাক্সটির ভিতরের মাত্রাগুলির প্রত্যেকটিই বাহিরের মাত্রা অপেক্ষা $(2\times2{\cdot}5)$ সে. মি. বা 5 সে.মি. করিয়া কম হইবে।

$\therefore$ বাক্সটির ভিতরের দৈর্ঘ্য $=(125-5)$ সে. মি. $=120$ সে. মি.,

প্রস্থ $=(105-5)$ সে.মি. $=100$ সে.মি এবং

উচ্চতা $=(80-5)$ সে. মি. $=75$ সে. মি.

$\therefore$ বাক্সটির ভিতরের আয়তন $=120\times100\times75$ ঘন সে. মি.

$$=\frac{120\times100\times75}{10\times10\times10} \text{ ঘন ডেসি মিটার}$$

$=900$ ঘন ডেসি মিটার।

$\therefore$ বাক্সটি তৈয়ারী করিতে প্রয়োজনীয় কাঠের পরিমাণ

$=(1050-900)$ ঘন ডেসি মিটার

$=105$ ঘন ডেসি মিটার।

এখন 50 ঘন ডেসি মিটার কাঠের দাম $=5$ টাকা

$\therefore$ 1 " " " " $=\frac{5}{50}$ " $=\frac{1}{10}$ টাকা

$\therefore$ 150 " " " " $=\frac{1}{10}\times150$ টাকা $=15$ টাকা

$\therefore$ বাক্সটি তৈয়ারী করিতে 15 টাকার কাঠ কিনিতে হইবে।

উদা. 6. একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 18 ইঞ্চি, 10 ইঞ্চি এবং 6 ইঞ্চি। বাক্সটি অর্ধ ইঞ্চি পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী, খালি বাক্সটির ওজন 15 পাউণ্ড এবং বালিপূর্ণ বাক্সটির ওজন 100 পাউণ্ড হইলে এক ঘন ইঞ্চি কাঠের এবং বালির ওজন কত ?

উঃ বাক্সটির বাহিরের আয়তন $= 18 \times 10 \times 6$ ঘনইঞ্চি।
$= 1080$ ঘনইঞ্চি।

বাক্সটির ভিতরের দৈর্ঘ্য $= (18 - 2 \times \frac{1}{2})$ ইঞ্চি $= 17$ ইঞ্চি,
প্রস্থ $= (10 - 2 \times \frac{1}{2})$ ইঞ্চি $= 9$ ইঞ্চি এবং উচ্চতা $= (6 - 2 \times \frac{1}{2})$ ইঞ্চি
$= 5$ ইঞ্চি।

$\therefore$ বাক্সটির ভিতরের আয়তন $= 17 \times 9 \times 5$ ঘন ইঞ্চি $= 765$ ঘন ইঞ্চি।

$\therefore$ বালির আয়তন $= 765$ ঘন ইঞ্চি।

$\therefore$ কাঠের আয়তন $= (1080 - 765)$ ঘন ইঞ্চি $= 315$ ঘন ইঞ্চি।

$\therefore$ 315 ঘন ইঞ্চি কাঠের ওজন $= 15$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 1 " " " " $= \frac{15}{315}$ পাউণ্ড $= \frac{1}{21}$ পাউণ্ড।

এখানে 765 ঘন ইঞ্চি বালির ওজন $= (100 - 15)$ পাউণ্ড $= 85$ পাউণ্ড

$\therefore$ 1 ঘন ইঞ্চি বালির ওজন $= \frac{85}{765}$ পাউণ্ড $= \frac{1}{9}$ পাউণ্ড।

উদা. 7. একটি ঢাকনাবিহীন দস্তার চৌবাচ্চার বাহিরের দৈর্ঘ্য 3 ফুট 3 ইঞ্চি, প্রস্থ 2 ফুট 3 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 2 ফুট 1 ইঞ্চি। ইহাতে 75 গ্যালন তরল ধরে। যদি চৌবাচ্চাটির নিম্নতলটি 1 ইঞ্চি এবং উহার প্রত্যেকটি পার্শ্বতল x ইঞ্চি পুরু হয় তবে x-এর মান নির্ণয় কর।

[1 ঘন ফুট $= 6\frac{1}{4}$ গ্যালন]

উঃ এখানে চৌবাচ্চাটির পার্শ্বতলগুলি x ইঞ্চি পুরু বলিয়া উহার ভিতরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের প্রত্যেকটিই বাহিরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ অপেক্ষা $2x$ ইঞ্চি করিয়া কম হইবে।

$\therefore$ চৌবাচ্চাটির ভিতরের দৈর্ঘ্য $=$ (3 ফুট 3 ইঞ্চি $- 2x$ ইঞ্চি) $= (39 - 2x)$ ইঞ্চি
এবং প্রস্থ $=$ (2 ফুট 3 ইঞ্চি $- 2x$ ইঞ্চি) $= (27 - 2x)$ ইঞ্চি।

আবার ঢাকনাবিহীন চৌবাচ্চাটির নিম্নতলটি 1 ইঞ্চি পুরু ;

$\therefore$ উহার ভিতরের উচ্চতা $=$ (2 ফুট 1 ইঞ্চি $-$ 1 ইঞ্চি) $= 24$ ইঞ্চি।

$\therefore$ চৌবাচ্চাটির ভিতরের আয়তন $= (39 - 2x)(27 - 2x)\,24$ ঘন ইঞ্চি

আবার $6\frac{1}{4}$ গ্যালন $= 1$ ঘন ফুট ;

$\therefore$ 75 গ্যালন $= \dfrac{75}{6\frac{1}{4}}$ ঘনফুট $= \dfrac{75 \times 4}{25}$ ঘনফুট $= 12$ ঘনফুট

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$ ঘন ইঞ্চি

শর্তানুসারে,

$(39-2x)(27-2x)\ 24$ ঘন ইঞ্চি $=12\times12\times12\times12$ ঘন ইঞ্চি।

বা, $1053-132x+4x^2=864$ বা, $4x^2-132x+189=0$

বা, $4x^2-126x-6x+189=0$ বা, $2x(2x-63)-3(2x-63)=0$

বা, $(2x-63)(2x-3)=0$ ... (i)

$\therefore$ $2x-63=0$ এবং $2x-3=0$ একঘাত সমীকরণ দুইটির সমাধানই (i) সমীকরণটির সমাধান।

এখন $2x-63=0$ বা, $2x=63$ $\therefore$ $x=31\frac{1}{2}$.

আবার $2x-3=0$ বা, $2x=3$ $\therefore$ $x=1\frac{1}{2}$.

কিন্তু $x=31\frac{1}{2}$ হইলে চৌবাচ্চাটির পার্শ্বতলের বেধ উহার প্রস্থ (27 ইঞ্চি) অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। অতএব প্রদত্ত সমাধানটির ক্ষেত্রে x-এর মান $31\frac{1}{2}$ হইতে পারে না।

$\therefore$ x-এর নির্ণেয় মান $=1\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 2

1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 6 মিটার; প্রস্থ 3 মিটার এবং উচ্চতা 2 মিটার। উহার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

2. একটি ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য 1·5 মিটার। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উহার প্রতি বর্গমিটার 4 টাকা দরে রং করিতে কত খরচ হইবে ?

3. একটি আয়তাকার ঘরে 3240 ঘন ফুট বায়ু ধরে। যদি ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য 18 ফুট এবং প্রস্থ 12 ফুট হয় তবে ঘরটির উচ্চতা কত ?

4. 40 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি শ্রেণীকক্ষ নির্মাণ করিতে হইবে যাহাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্যে 6·5 বর্গ মিটার মেঝে এবং 20·8 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। ঘরটির দৈর্ঘ্য 26 মিটার হইলে উহার প্রস্থ এবং উচ্চতা নির্ণয় কর।

5. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য $12x$, প্রস্থ $4x$ এবং উচ্চতা $3x$; উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য 6·5 মিটার হইলে চৌপলটির আয়তন কত ?

6. একটি জলাধারে $243\frac{3}{4}$ ঘনফুট জল ধরে। 4 ফুট 4 ইঞ্চি গভীর এবং বর্গাকার তলবিশিষ্ট অপর একটি জলাধারে পূর্বের জলাধারটির চারগুণ জল ধরে। বৃহত্তর জলাধারটির দৈর্ঘ্য কত ?

7. কোন ঘনকের সমগ্রতলের মোট ক্ষেত্রফল 346·56 বর্গ মিটার। উহার প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ($\sqrt{3}=1·732$)

8. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার সমষ্টি 36 সে. মি.। উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 সে. মি. হইলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

9. ধাতুনির্মিত তিনটি নিরেট ঘনকের প্রান্তিকীগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 ইঞ্চি। উহাদের গলাইয়া একটি নিরেট ঘনক তৈয়ারী করা হইল। নূতন ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

10. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 80 সে. মি., প্রস্থ 75 সে. মি. এবং উচ্চতা 36 সে. মি.। উহার সমান আয়তনবিশিষ্ট ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11 12 মিটার দীর্ঘ এবং 9 মিটার বিস্তৃত কোন আয়তাকার জমির বাহিরে 0·2 মিটার চওড়া এবং 1·5 মিটার উচ্চ প্রাচীর করিবার জন্যে 20 সে. মি. × 10·7 সে.মি. × 5 সে.মি. আয়তনের কতগুলি ইটের প্রয়োজন হইবে ?

12. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 300 গজ এবং প্রস্থ 150 গজ। একটি নলদ্বারা প্রতি সেকেণ্ডে শূন্য চৌবাচ্চাটিতে $12\frac{1}{2}$ ঘনফুট জল পড়িলে কত সময়ে ঐ চৌবাচ্চার জলতল $2\frac{1}{2}$ ফুট উপরে উঠিবে ?

13. 25 ফুট 5 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 12 ফুট 10 ইঞ্চি বিস্তৃত কোন চৌবাচ্চা হইতে কত গ্যালন জল তুলিয়া লইলে উহার জলতল 3 ফুট নীচে নামিয়া যাইবে ? [1 ঘনফুট জলের ওজন = 1000 আউন্স এবং 1 গ্যালন = 10 পাউণ্ড]

14. একটি সমকোণী চৌপলের মাত্রাগুলির অনুপাত 5 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্র তলের পরিমাণ 558 বর্গ সে. মি.। চৌপলটির মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

15. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উহার উচ্চতা 7 মিটার। চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 396 বর্গমিটার হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত ?

16. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং উহাতে 2304 ঘনফুট বায়ু ধরে। উহার মেঝেতে প্রতি বর্গফুট 5·25 টাকা দরে কার্পেট বসাইতে 1008 টাকা ব্যয় হইলে ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা কত হইবে ?

17. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের 3 গুণ এবং উচ্চতার 5 গুণ। চৌপলটির ঘনফল 14400 ঘন সে. মি. হইলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. 1 ফুট 8 ইঞ্চি দীর্ঘ, 1 ফুট 2 ইঞ্চি বিস্তৃত এবং 9 ইঞ্চি উচ্চ একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্স $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী করিতে হইলে কত ঘনফুট কাঠের প্রয়োজন হইবে ?

19. একটি ঢাকনাবিহীন বাক্স 1 ইঞ্চি পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী। উহার বাহিরের দৈর্ঘ্য 2 ফুট 10 ইঞ্চি, প্রস্থ 2 ফুট 5 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 1 ফুট 7 ইঞ্চি হইলে বাক্সটির

ভিতরের আয়তন নির্ণয় কর। প্রতি ঘনফুট কাঠের দাম 54 টাকা হইলে বাক্সটির জন্যে কত টাকার কাঠ লাগিয়াছিল ?

20. একটি ঢাকনাযুক্ত বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য 12 সে. মি., প্রস্থ 10 সে. মি. এবং উচ্চতা 8 সে. মি.। উহার ভিতরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 376 বর্গ সে মি.। বাক্সটির দেওয়ালগুলি সমভাবে পুরু হইলে উহার ভিতরের আয়তন কত ?

21. 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত এবং $3\frac{2}{3}$ ফুট গভীর কোন চৌবাচ্চায় 30 ঘনফুট জল আছে। চৌবাচ্চাটির মধ্যে 9 ইঞ্চি $\times$ 3 ইঞ্চি $\times$ $2\frac{2}{3}$ ইঞ্চি মাপের x সংখ্যক ইট ফেলাতে উহার জল চৌবাচ্চাটিকে কানায় কানায় পূর্ণ করিল। যদি প্রত্যেকটি ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল চুষিয়া লইয়া থাকে তবে x-এর মান নির্ণয় কর।

22. একটি আয়তকার জলাধারের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উহার গভীরতা $10\frac{1}{2}$ ফুট। জলাধারটিতে $37\frac{1}{2}$ টন জল ধরে। 1 ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে জলাধারটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত হইবে ?

23. একটি কাঠের বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য 18 সে. মি., প্রস্থ 10 সে মি এবং উচ্চতা 6 সে. মি.। উহা $\frac{1}{2}$ সে. মি. পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী। খালি অবস্থায় উহার ওজন $1\frac{5}{4}$ কিলোগ্রাম এবং বালিপূর্ণ অবস্থায় ওজন 25 কিলোগ্রাম। সমপরিমাণ কাঠ ও বালির ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর।

24. একটি সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 192 বর্গ সে. মি, আয়তন 144 ঘন সে. মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 13 সে. মি.। চৌপলটির মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

চোঙ (Cylinder): কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে অক্ষটির চারিদিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহাকে **চোঙ** (Cylinder) বলে। আয়তক্ষেত্রের যে বাহুটিকে অক্ষ হিসাবে গ্রহণ করা হয় তাহার সন্নিহিত বাহু দুইটির পূর্ণ আবর্তনে উৎপন্ন বৃত্তাকার তল দুইটিকে চোঙের **প্রান্ততল** বা **ভূমি** (Base) বলে। ঐ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের যে কোনটির দৈর্ঘ্যকে চোঙটির **ভূমির ব্যাসার্ধ** (Radius of the base) বলা হয়। অপরপক্ষে আয়তক্ষেত্রটির যে বাহুটিকে অক্ষ ধরা হইয়াছে তাহার সমান্তরাল বাহুটির পূর্ণ আবর্তনে যে তলের সৃষ্টি হয় তাহাকে চোঙটির **বক্রতল** (Curved surface) বলে।

চিত্রে ABCD আয়তক্ষেত্রের AB বাহুকে অক্ষ ধরিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে ঘূর্ণনের ফলে চোঙটি উৎপন্ন হইয়াছে। এক্ষেত্রে BC অথবা AD-এর দৈর্ঘ্য চোঙটির ব্যাসার্দ্ধ এবং AB-এর দৈর্ঘ্য চোঙটির উচ্চতা (Height)। চোঙটির প্রান্ততল দুইটির কেন্দ্র বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা চোঙটির ভূমির উপর লম্ব বলিয়া চোঙটিকে লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (Right circular cylinder) বলে। চোঙ বিষয়ক আলোচনায় কেবলমাত্র লম্ব বৃত্তাকার চোঙ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। নিম্নে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ক্ষেত্রফল এবং আয়তনের সূত্র দেওয়া হইল।

কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা h একক এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r একক হইলে,

(i) চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক ;

(ii) চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা
$= 2\pi rh$ বর্গ একক ;

(iii) চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + 2 × ভূমির ক্ষেত্রফল $= (2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক ;
$= 2\pi r(r+h)$ বর্গ একক ;

(iv) চোঙের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= \pi r^2 h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা

[π-এর মান দেওয়া না থাকিলে উহাকে $\frac{22}{7}$ ধরিবে]

উদা. 1. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 8 সে. মি. এবং উচ্চতা 12 সে. মি। চোঙটির আয়তন এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উঃ এখানে চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{8}{2}$ সে. মি. = 4 সে. মি. এবং চোঙের উচ্চতা = 12 সে. মি.।

$\therefore$ চোঙের আয়তন $= \frac{22}{7} \times (4)^2 \times 12$ ঘন সে. মি.।
$= \frac{4224}{7}$ ঘন সে. মি. $= 603\frac{3}{7}$ ঘন সে. মি.।

চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times 4(12+4)$ বর্গ সে. মি.
$= 402\frac{2}{7}$ বর্গ সে. মি.।

উদা. 2. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 1000 বর্গ সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 20 সে. মি.। উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, চোঙটির উচ্চতা $= h$ সে. মি.।

এখানে চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{20}{2}$ সে মি. $= 10$ সে. মি.।

শর্তানুসারে,

চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 1000$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ $2\pi \times 10 \times h$ বর্গ সে মি. $= 1000$ বর্গ সে. মি.

$$\therefore \quad h = \frac{50}{\pi}.$$

এখন চোঙটির আয়তন $= \pi \times 100 \times \frac{50}{\pi}$ ঘন সে. মি.

$= 5000$ ঘন সে. মি.।

উদা. 3. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 792 বর্গ সে মি. এবং আয়তন 2772 ঘন সে. মি.। চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $= r$ এবং উচ্চতা $= h$.

শর্তানুসারে,

চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 792$ বর্গ সে. মি.

বা, $2\pi rh = 792$ বর্গ সে. মি. ... ... (i)

আবার চোঙটির আয়তন $= 2772$ ঘন সে. মি.

বা, $\pi r^2 h = 2772$ ঘন সে. মি. ... ... (ii)

$\left\{\frac{(ii)}{(i)}\right\}$ করিয়া, $\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{2772 \text{ ঘন সে. মি.}}{792 \text{ বর্গ সে মি.}}$

বা, $\frac{r}{2} = \frac{7}{2}$ সে. মি. $\therefore$ $r = 7$ সে. মি.

এখন $2\pi rh = 792$ বর্গ সে. মি.

বা, $h = \frac{792}{2\pi r}$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{792 \text{ বর্গ সে. মি.}}{2 \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ সে. মি.}} = 18$ সে. মি.

$\therefore$ চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ $= 7$ সে. মি. এবং উহার উচ্চতা $= 18$ সে. মি.।

উদা. 4. একটি ফাঁপা লম্ববৃত্তাকার চোঙের দৈর্ঘ্য 21 সে. মি., বাহিরের ব্যাস 15 সে. মি. এবং উহা $\frac{1}{2}$ সে. মি. পুরু লোহার পাত দিয়া তৈয়ারী। লোহার ঘনত্ব 7·8 গ্রাম/ঘন সে. মি. হইলে চোঙটির ওজন কত হইবে।

উঃ এখানে চোঙটির বাহিরের ব্যাসার্ধ $= \frac{15}{2}$ সে. মি. $= 7\frac{1}{2}$ সে. মি.

এবং ভিতরের ব্যাসার্ধ $= 7\frac{1}{2}$ সে. মি. $- \frac{1}{2}$ সে. মি. $= 7$ সে. মি.

$\therefore$ প্রদত্ত চোঙটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi(7\frac{1}{2})^2$ বর্গ সে. মি. $- \pi(7)^2$ বর্গ সে. মি.

$= \pi[\,(7\frac{1}{2})^2 - (7)^2\,]$ বর্গ সে. মি.

$= \pi\,(\frac{225}{4} - 49)$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{29}{4}\,\pi$ বর্গ সে. মি.

এখানে চোঙটির উচ্চতা $= 21$ সে. মি. ;

$\therefore$ চোঙটির আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$$= \frac{29}{4}\pi \times 21 \text{ ঘন সে মি.}$$

$$= \frac{29}{4} \times \frac{22}{7} \times 21 \text{ ঘন সে. মি.}$$

$= 478·5$ ঘন সে. মি.

$\therefore$ লোহার পাতের আয়তন $= 478·5$ ঘন সে.মি.

$\therefore$ লোহার পাতের ওজন $= 478·5 \times 7·8$ গ্রাম $= 3732·3$ গ্রাম।

$\therefore$ চোঙটির ওজন $= 3732·3$ গ্রাম।

উদা. 5. লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি একখণ্ড কাঠের টুকরার দৈর্ঘ্য 3·5 মিটার এবং ইহার প্রান্ততলের ব্যাস 1 মিটার। উহা হইতে বর্গাকার ভূমি বিশিষ্ট বৃহত্তম আয়তনের একটি সমকোণী চৌপল প্রস্তুত করা হইল। উক্ত চৌপলটিতে মূল কাঠখণ্ডটির শতকরা কতভাগ কাঠ থাকিবে ?

উঃ এখানে চোঙাকৃতি কাঠখণ্ডের প্রান্ততলের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ মিটার। এবং উহার উচ্চতা $= 3·5$ মিটার।

$\therefore$ চোঙাকৃতি কাঠখণ্ডের আয়তন $= \frac{22}{7} \times (\frac{1}{2})^2 \times 3·5$ ঘন মিটার

$= \frac{11}{4}$ ঘনমিটার $= 2·75$ ঘনমিটার

আবার 1 মিটার ব্যাসযুক্ত বৃত্তে অন্তর্লিখিত বৃহত্তম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (বৃত্তের ব্যাস $)^2 = \frac{1}{2} \times (1)^2$ বর্গমিটার $= \frac{1}{2}$ বর্গমিটার।

প্রদত্ত কাঠখণ্ড হইতে উৎপন্ন বৃহত্তম আয়তনের সমকোণী চৌপলটির আয়তন $= \frac{1}{2}$ বর্গমিটার $\times 3\cdot5$ মিটার $= 1\cdot75$ ঘন মিটার।

এখন, কাঠখণ্ডটির আয়তন $2\cdot75$ ঘন মিঃ হইলে সমকোণী চৌপলটির আয়তন
$= 1\cdot75$ ঘন মিটার।

$\therefore$ কাঠখণ্ডটির আয়তন 1 ঘন মিঃ হইলে সমকোণী চৌপলটির আয়তন
$= \frac{1\cdot75}{2\cdot75}$ ঘন মিটার

$\therefore$ কাঠখণ্ডটির আয়তন 100 ঘন মিঃ হইলে সমকোণী চৌপলটির আয়তন
$= \frac{1\cdot75}{2\cdot75} \times 100$ ঘন মিঃ $= 63\frac{7}{11}$ ঘন মিঃ

$\therefore$ সমকোণী চৌপলটিতে মূল কাঠখণ্ডের $63\frac{7}{11}\%$ কাঠ আছে।

প্রশ্নমালা 3

1. কোন লম্ববৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 15 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 4 সে মি. উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের দৈর্ঘ্য 28 সে. মি. এবং ব্যাসার্ধ 9 সে. মি। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

3. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 20 ফুট এবং ভূমির পরিসীমা 11 ফুট। উহার আয়তন নির্ণয় কর।

4. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস $6\cdot3$ সে. মি. এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 297 বর্গ সে. মি.। চোঙটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

5. লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি কোন স্তম্ভের উচ্চতা 13 মিটার এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল $114\cdot4$ বর্গ মিটার। স্তম্ভটির ভূমির পরিসীমা নির্ণয় কর।

6. লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি একটি স্তম্ভের উচ্চতা 12 মিটার এবং উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $402\frac{2}{7}$ বর্গমিটার। স্তম্ভটির ব্যাস নির্ণয় কর।

7. কোন লম্ববৃত্তাকার চোঙের দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{3}$ অংশের সমান। চোঙটির উচ্চতা ও ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় কর।

8. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল S, ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং আয়তন v হইলে দেখাও যে $v = \frac{1}{2}Sr - \pi r^3$.

9. 9 সে. মি. দীর্ঘ, 6 সে. মি. বিস্তৃত এবং 11 সে মি. উচ্চ একটি সমকোণী চৌপল প্রস্তুত করিতে $\frac{3}{4}$ সে. মি. ব্যাস-বিশিষ্ট $\frac{1}{8}$ সে.মি. পুরু কতগুলি ধাতব চাকৃতির প্রয়োজন ?

10. এক ঘন ফুট তামা হইতে $\frac{1}{16}$ ইঞ্চি ব্যাস যুক্ত তার তৈয়ারী করিলে তারটির দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

11. একটি ফাঁপা লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ $\frac{1}{2}$ সে.মি. পুরু লোহার পাত দিয়া তৈয়ারী। ইহার ভিতরের ব্যাস 5 সে. মি.। চোঙটির উচ্চতা 96 সে. মি হইলে উহা তৈয়ারী করিতে কত আয়তনের লোহার প্রযোজন হইবে ?

12. x সে মি. পুরু ধাতব পাত দ্বারা তৈয়ারী কোন লম্ববৃত্তাকার চোঙের বাহিরের ব্যাস $2r$ সে.মি. এবং উচ্চতা h সে.মি. হইলে দেখাও যে, ধাতব পাতের আয়তন $h\{r^2-(r-x)^2\}$.

13. একটি লোহার নলের পরিধি 57·2 ফুট এবং উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ 9 ফুট। 21 ফুট দীর্ঘ নলটির ভূমির ক্ষেত্রফল এবং লোহার আয়তন বাহির কর।

14. $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু ধাতব পাতে প্রস্তুত একটি নলের ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি ও দৈর্ঘ্য 20 ফুট। এক ঘন ইঞ্চি ধাতুর ওজন 4·562 আউন্স হইলে ঐ নলটির ওজন নির্ণয় কর।

15. একটি লোহার নলের দৈর্ঘ্য 9 ফুট, উহার ভিতরের ছিদ্রের ব্যাস 3 ইঞ্চি এবং দেওয়াল 1 ইঞ্চি পুরু। যদি এক ঘন ইঞ্চি লোহার ওজন $\frac{1}{4}$ পাউণ্ড হয়, তবে সমগ্র নলটির ওজন নির্ণয় কর।

16. 5 ফুট ব্যাসার্ধ ও 30 ফুট উচ্চতা-বিশিষ্ট লম্ববৃত্তাকার চোঙের আকারে একটি গাছের গুঁড়ি আছে। উহাকে যতটা সম্ভব কম ছাঁটিয়া একটি বর্গাকার ভূমি-বিশিষ্ট সমকোণী চৌপল উৎপন্ন করা হইল। ইহাতে ছাঁটিয়া ফেলা কাঠের আয়তন সমকোণী চৌপলটির আয়তনের শতকরা কত ভাগ হইবে ?

17. 80 ফুট দীর্ঘ ও 20 ফুট প্রশস্ত একটি আয়তকার মাঠের মধ্যস্থলে 16 ফুট ব্যাস-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার কূপ 35 ফুট গভীর করিয়া খনন করা হইল এবং ঐ কূপের মাটি মাঠের অবশিষ্টাংশে ছড়াইয়া দেওয়া হইল। মাঠের উচ্চতা কত বাড়িল ?

18. 5 ফুট ব্যাস-বিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি জলাধার হইতে ঘণ্টায় 110 গ্যালন জল নির্গত হয়। 36 মিনিট পরে জলাধারটির জলতল কত ইঞ্চি নীচে নামিবে ?

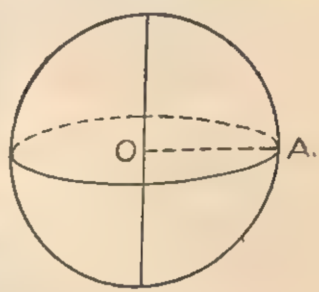
[1 ঘ. ফু. $= 6\frac{1}{4}$ গ্যালন]

19. একটি 5 মি.মি. ব্যাস-বিশিষ্ট নল হইতে প্রতি মিনিটে 10 মিটার বেগে জল নির্গত হইতেছে। 2 মিটার উচ্চ এবং 0·32 মিটার ব্যাস যুক্ত কোন চোঙাকৃতি জলাধারকে ঐ জল দ্বারা পূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে ?

20. দুই মুখ বন্ধ একটি চোঙাকৃতি লোহ পাত্রের উচ্চতা 4 ফুট। উহার বাহিরের বেড় 40 ইঞ্চি এবং ধাতুর বেধ 1 ইঞ্চি ; যদি লোহা জলের $7\frac{1}{3}$ গুণ ভারী এবং 1 ঘনফুট জলের ওজন 62·5 পাউণ্ড হয় তবে জলপূর্ণ অবস্থায় ঐ পাত্রটির ওজন কত ?

21. একটি ফাঁপা ধাতুর চোঙের দৈর্ঘ্য 6 ইঞ্চি এবং উহার সমগ্রতলের (ভিতর ও বাহিরের বক্রতল ও প্রান্ততলদ্বয়ের) ক্ষেত্রফল 308 বর্গইঞ্চি। উহার বাহিরের ব্যাস 8 ইঞ্চি। যদি এক ঘন ইঞ্চি ধাতুর ওজন 4 আউন্স হয়, তবে নলটির ওজন কত ?

গোলক (Sphere) : কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া ঐ ব্যাসের চারিদিকে অর্ধবৃত্তটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে ঘন বস্তু উৎপন্ন হয় তাহাকে **গোলক (Sphere)** বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ যথাক্রমে গোলকটির কেন্দ্রবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ হইবে। পার্শ্বের চিত্রে গোলকটির কেন্দ্রবিন্দু O এবং ব্যাসার্ধ $\overline{OA}$.



কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হইলে,

(i) গোলকটির পরিধি $=2\pi r$ একক

(ii) গোলকটির ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2$ বর্গএকক ;

এবং (iii) গোলকটির আয়তন $=\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘনএকক।

উদাহরণমালা

উদা. 1. 14 সে.মি. ব্যাস-বিশিষ্ট গোলকের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

উঃ এখানে গোলকের ব্যাসার্ধ $=\frac{14}{2}$ সে.মি. $=7$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকটির ক্ষেত্রফল $=4\times\frac{22}{7}\times7^2$ বর্গ সে.মি. $=616$ বর্গ সে.মি.

গোলকটির আয়তন $=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times7^3$ ঘন সে.মি. $=1437\frac{1}{3}$ ঘন সে.মি.

উদা. 2. কোন গোলকের ঘনফলের সাংখ্যমান উহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমানের দ্বিগুণ হইলে গোলকটির ব্যাসার্ধ কত ?

উঃ মনে কর, গোলটির ব্যাসার্ধ $= x$ একক

$\therefore$ গোলকটির ক্ষেত্রফল $= 4\pi x^2$ বর্গএকক এবং

গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi x^3$ ঘনএকক।

শর্তানুসারে, $\frac{4}{3}\pi x^3 = 2 \times 4\pi x^2 \quad \therefore \quad x = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= 6$ একক।

উদা. 3. 3 সে.মি ব্যাস-বিশিষ্ট একটি গোলককে গালাইয়া $1\frac{1}{2}$ সে.মি., 2 সে. মি. এবং x সে.মি. ব্যাসের তিনটি গোলক প্রস্তুত করা হইলে, x-এর মান কত হইবে?

উঃ এখানে 3 সে.মি. ব্যাস যুক্ত গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(\frac{3}{2})^3$ ঘন সে.মি. ;

$\frac{3}{2}$ সে মি. " " " " $= \frac{4}{3}\pi(\frac{3}{4})^3$ ঘন সে.মি. ;

2 সে মি. " " " " $= \frac{4}{3}\pi(1)^3$ ঘন সে.মি. ;

x সে.মি " " " " $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3$ ঘন সে.মি.

শর্তানুসারে,

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi(1)^3 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

বা, $\frac{27}{64} + 1 + \frac{x^3}{8} = \frac{27}{8}$ বা, $\frac{x^3}{8} = \frac{27}{8} - \frac{27}{64} - 1$

বা, $\frac{x^3}{8} = \frac{125}{64}$ বা, $x^3 = \frac{125}{8}$

বা, $x^3 = (\frac{5}{2})^3 \quad \therefore \quad x = \frac{5}{2}$.

উদা, 4. 4 ইঞ্চি ব্যাস-যুক্ত একটি নিরেট লৌহ গোলকের ওজন 9 পাউণ্ড। ঐ লৌহ-নির্মিত একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাস 9 ইঞ্চি এবং ভিতরের ব্যাস 6 ইঞ্চি হইলে উহার ওজন কত হইবে?

উঃ এখানে 4 ইঞ্চি ব্যাস যুক্ত লৌহ গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(2)^3$ ঘন ইঞ্চি।

আবার 9 " " " গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(\frac{9}{2})^3$ ঘন ইঞ্চি,

এবং 6 " " " " " $= \frac{4}{3}\pi(3)^3$ ঘন ইঞ্চি।

$\therefore$ ফাঁপা গোলকটির লোহার আয়তন $= [\,\frac{4}{3}\pi(\frac{9}{2})^3 - \frac{4}{3}\pi(3)^3\,]$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{4}{3}\pi(\frac{729}{8} - 27)$ ঘন ইঞ্চি $= \frac{4}{3}\pi \times \frac{513}{8}$ ঘন ইঞ্চি।

এখন $\frac{4}{3}\pi\ 2^3$ ঘন ইঞ্চি লোহের ওজন $=9$ পাউণ্ড

$\therefore\quad 1$ " " " " $=\dfrac{9}{\frac{4}{3}\pi.2^3}$ পাউণ্ড

$\therefore\quad \frac{4}{3}\pi.\dfrac{513}{8}$ " " " $=\dfrac{9}{\frac{4}{3}\pi.8}\times\frac{4}{3}\pi.\dfrac{513}{8}$ পাউণ্ড

$=\frac{4617}{64}$ পাউণ্ড $=72\frac{9}{64}$ পাউণ্ড

$\therefore$ ফাঁপা গোলকটির ওজন $=72\frac{9}{64}$ পাউণ্ড।

উদা. 5. আংশিক জলপূর্ণ একটি চোঙাকৃতি পাত্রের ভিতরের ব্যাস 20 সে.মি.। উহার মধ্যে 15 সে. মি. ব্যাসের একটি ধাতব গোলক সম্পূর্ণরূপে নিমজ্জিত হইলে জলতল কতটা উপরে উঠিবে ?

উঃ মনে কর, গোলকটি নিমজ্জনের ফলে পাত্রের জলতল x সে. মি. উপরে উঠিবে।

এখন চোঙাকৃতি জলাধারটির ভূমির ক্ষেত্রফল $=\pi.10^2$ বর্গ সে. মি.।

$\therefore$ x সে. মি. উচ্চ জলস্তম্ভের আয়তন $=\pi.10^2.x$ ঘন সে. মি.

$=$ গোলক কর্তৃক অপসারিত জলের আয়তন।

আবার গোলকটির ব্যাসার্ধ $=\frac{15}{2}$ সে. মি. ;

গোলকটির আয়তন $=\frac{4}{3}\pi(\frac{15}{2})^3$ ঘন সে. মি.

শর্তানুসারে,

$\pi\cdot10^2.x$ ঘন সে. মি. $=\frac{4}{3}\pi(\frac{15}{2})^3$ ঘন সে. মি.

বা, $x=\frac{4}{3}\times\frac{15}{2}\times\frac{15}{2}\times\frac{15}{2}\times\frac{1}{100}=5\frac{5}{8}$.

$\therefore$ পাত্রের জলতল $5\frac{5}{8}$ সে. মি. উপরে উঠিবে।

উদা. 6. একটি নিরেট চোঙের উচ্চতা 9 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 4 সে. মি। উহাকে একটি গোলকে পরিণত করা হইল। উৎপন্ন গোলক এবং চোঙের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

উঃ এখানে চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $=2$ সে. মি. এবং উহার উচ্চতা $=9$ সে. মি.।

$\therefore$ চোঙটির আয়তন $=\pi.2^2.9$ ঘন সে. মি. $=36\pi$ ঘন সে. মি.

আবার চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$=2\pi.2(9+2)$ বর্গ সে. মি. $=44\pi$ বর্গ সে. মি.।

মনে কর, উৎপন্ন গোলকটির ব্যাসার্ধ $=x$ সে. মি.।

এখন গোলকটির আয়তন $=\frac{4}{3}\pi x^3$ ঘন সে. মি.

শর্তানুসারে, $\frac{4}{3}\pi x^3$ ঘন সে. মি. $=36\pi$ ঘন সে. মি.

বা, $x^3=27$ $\therefore$ $x=3$

আবার গোলকটির ক্ষেত্রফল $=4\pi x^2$ বর্গ সে. মি.

$=4\pi.3^2$ বর্গ সে. মি. $=36\pi$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ গোলকের ক্ষেত্রফল : চোঙের ক্ষেত্রফল $=36\pi : 44\pi = 9 : 11.$

উদা. 7. নির্দিষ্ট ব্যাসের একটি গোলকের আয়তন উহার সমব্যাসবিশিষ্ট একটি চোঙের আয়তনের $\frac{5}{9}$ অংশ। চোঙটির উচ্চতা উহার ব্যাস অপেক্ষা শতকরা কত অধিক হইবে ?

উঃ মনে কর, গোলকটির ব্যাস $=2x$ একক।

$\therefore$ গোলকটির ব্যাসার্ধ $=x$ একক।

$\therefore$ গোলকটির আয়তন $=\frac{4}{3}\pi x^3$ ঘন একক।

এখানে চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ $=x$ একক ; মনে কর চোঙটির উচ্চতা $=y$ একক।

$\therefore$ চোঙটির আয়তন $=\pi.x^2.y$ ঘন একক

শর্তানুসারে,

$\frac{5}{9}\times\pi.x^2y$ ঘন একক $=\frac{4}{3}\pi x^3$ ঘন একক

বা, $y=\frac{12x}{5}.$

$\therefore$ চোঙটির উচ্চতা $=\frac{12x}{5}$ একক।

$\therefore$ চোঙটির উচ্চতা উহার ব্যাস অপেক্ষা $\left(\frac{12x}{5}-2x\right)$ একক

বা, $\frac{2x}{5}$ একক বেশি হইবে।

এখন চোঙটির ব্যাস $2x$ একক হইলে উহার উচ্চতা ব্যাস অপেক্ষা $\frac{2x}{5}$ একক বেশি হয়

$\therefore$ " " 1 " " " " " " $\frac{2x}{5\times 2x}$ " " "

$\therefore$ " " 100 " " " " " " $\frac{2x\times 100}{5\times 2x}$

বা, 20 একক বেশি হয়।

$\therefore$ চোঙটির উচ্চতা উহার ব্যাস অপেক্ষা 20% অধিক হইবে।

প্রশ্নমালা 4

1. একটি গোলকের ব্যাস 3·5 সে. মি. হইলে উহার ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

2. একটি গোলকের ক্ষেত্রফল 308 বর্গ সে. মি. হইলে উহার আয়তন কত হইবে?

3. কোন গোলকের আয়তন $1437\frac{1}{3}$ ঘন সে. মি. হইলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. একটি গোলকের পরিধি যত সেন্টিমিটার উহার আয়তনও তত ঘন সেন্টিমিটার। গোলকটির ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

5. x সে. মি. ব্যাসার্দ্ধযুক্ত কোন গোলকের ওজন W পাউণ্ড হইলে একই উপাদানের তৈয়ারী y সে. মি. ব্যাসযুক্ত গোলকের ওজন কত হইবে?

6. কোন গোলকের আয়তনের সাংখ্যমান উহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমানের সমান হইলে গোলকটির ব্যাস কত হইবে?

7. 3 সে. মি., 4 সে. মি. এবং 5 সে. মি. ব্যাসার্দ্ধের তিনটি ধাতব গোলককে গলাইয়া একটিমাত্র গোলক তৈয়ারী করা হইল। নূতন গোলকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. 6 ইঞ্চি ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট কোন গোলক হইতে 8 ইঞ্চি উচ্চ এবং 6 ইঞ্চি ব্যাস-বিশিষ্ট কতগুলি চোঙ তৈয়ারী করা যাইবে?

9. 11 সে. মি. দীর্ঘ 6 সে. মি. বিস্তৃত এবং 15 সে. মি. উচ্চ একখণ্ড ইস্পাত হইতে 3 সে. মি. ব্যাসের কয়টি গোলক তৈয়ারী করা যায়?

10. একটি গোলককে 16 সে. মি. উচ্চ একটি চোঙে রূপান্তরিত করা হইল। যদি চোঙটির ব্যাসার্দ্ধ গোলকটির ব্যাসার্দ্ধের সমান হয় তবে চোঙটির ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

11. একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাস 12 সে. মি. এবং উহা 2·5 সে. মি. পুরু। গোলকটির উপাদানের আয়তন কত?

12. একটি 4 ইঞ্চি ব্যাসার্দ্ধের গোলকের ওজন 8 পাউণ্ড। একই উপাদানের তৈয়ারী একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাস 10 ইঞ্চি এবং ভিতরের ব্যাস 6 ইঞ্চি হইলে উহার ওজন কত হইবে?

13. ঢালাই লোহা নির্মিত একটি গোলকের বাহিরের ব্যাস $7\frac{1}{2}$ মিটার এবং ভিতরের ব্যাস $6\frac{1}{2}$ মিটার। এক ঘন ডেসিমিটার লোহার ওজন 4·5 কি. গ্রা. হইলে গোলকটির ওজন কত হইবে ?

14. একটি বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 1 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 8 ইঞ্চি। ইহা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এক ইঞ্চি ব্যাসবিশিষ্ট কতগুলি মার্বেল উহার মধ্যে ফেলিলে চোঙের জল উহার কানায় পৌছিবে ?

15. 12 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি জলাধারের আংশিক জলপূর্ণ আছে। উহার মধ্যে 6 সে. মি. ব্যাসের একটি গোলককে ফেলাতে গোলকটি সম্পূর্ণরূপে নিমজ্জিত হইল। ইহাতে জলাধারের জলতল কত উপরে উঠিবে ?

16. সমান ব্যাসার্দ্ধের একটি গোলক এবং একটি চোঙের আয়তন সমান। চোঙটির ব্যাস উহার উচ্চতা অপেক্ষা শতকরা কত অধিক হইবে ?

17. একটি গোলক এবং একটি ঘনকের ক্ষেত্রফল সমান। দেখাও যে গোলকটির আয়তন ঘনকটির আয়তনের 1·38 গুণ। ($\pi = 3·1416$)

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

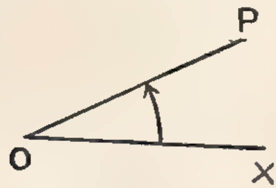
ত্রিকোণমিতি কোণ

(Trigonometrical Angle)

জ্যামিতিক কোণ (Geometrical Angle): দুইটি রশ্মি কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে ঐ বিন্দুতে কোণ (Angle) উৎপন্ন হয়। রশ্মি দুইটির প্রত্যেককে উক্ত কোণের বাহু এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কোণের শীর্ষবিন্দু বলে। জ্যামিতিতে যে কয়েক প্রকারের কোণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে তাহাদের মান 0° হইতে 180°-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণের যে কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক মান হইতে পারে। নিম্নে ত্রিকোণমিতিক কোণের বিস্তারিত আলোচনা করা হইল।

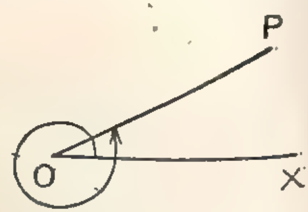
ত্রিকোণমিতিক কোণ (Trigonometrical Angle): কোন রেখাংশ উহার উপরিস্থিত কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া আবর্তিত হইলে ঐ আবর্তনের পরিমাণকে ত্রিকোণমিতিক কোণ (Trigonometrical Angle) বলে। আবর্তনকারী রেখাংশটির প্রাথমিক এবং শেষ অবস্থানকে যথাক্রমে কোণটির প্রারম্ভিক বাহু (Initial Side) এবং প্রান্তিক বাহু (Terminal Side)

বলা হয়। রেখাংশটি যে বিন্দুতে আবর্তিত হয় তাহাকে কোণটির শীর্ষবিন্দু (Vertex) বলে।



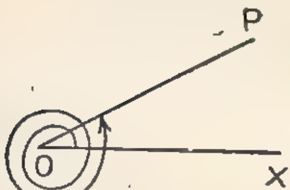
$\angle XOP = \theta$ (থিটা)

(*a*)



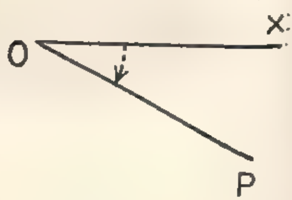
$\angle XOP = 2.180^\circ + \theta$

(*b*)



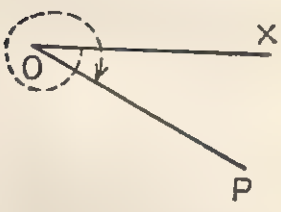
$\angle XOP = 4.\ 180^\circ + \theta$

(*c*)



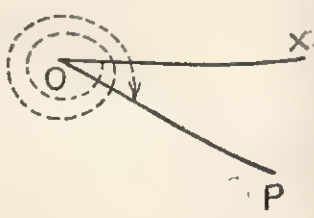
$\angle XOP = -\theta$

(*d*)



$\angle XOP = -2.180^\circ - \theta$

(*e*)



$\angle XOP = -4.180^\circ - \theta$

(*f*)

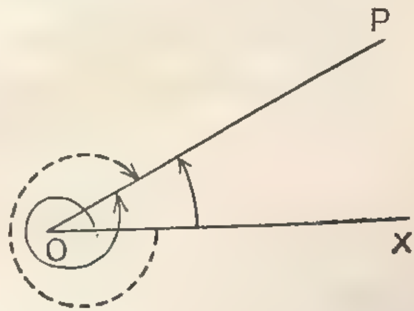
মনে কর, $\overline{OP}$ রেখাংশ O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া আবর্তিত হওয়ায় $\angle XOP$ উৎপন্ন হইয়াছে। অতএব $\angle XOP$-এর প্রারম্ভিক বাহু $\overline{OX}$, প্রান্তিক বাহু $\overline{OP}$ এবং শীর্ষবিন্দু O ; আবর্তনকারী রেখাংশ $\overline{OP}$ উহার প্রাথমিক অবস্থান $\overline{OX}$ হইতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে (anticlockwise direction) ঘুরিয়া যে সকল কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের **ধনাত্মক কোণ** বলে। এখানে (*a*), (*b*) এবং (*c*) চিত্রে $\overline{OP}$ রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলি প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং উহাদের

মান যথাক্রমে θ, $(2.180^\circ+\theta)$ এবং $(4.180^\circ+\theta)$; অপরপক্ষে যদি $\overline{OP}$ রেখাংশ উহার প্রাথমিক অবস্থান $\overline{OX}$ হইতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের অভিমুখে (clockwise direction) ঘুরিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তবে তাহাদের **ঋণাত্মক কোণ** বলে। (d), (e) এবং (f) চিত্রে প্রদর্শিত কোণগুলি প্রত্যেকেই ঋণাত্মক এবং উহাদের মান যথাক্রমে $(-\theta)$; $(-2.180^\circ-\theta)$ এবং $(-4.180^\circ-\theta)$.

সম-প্রান্তিক কোণ (Coterminal Angle) :

যদি আবর্তনকারী রেখাংশ নির্দিষ্ট শীর্ষবিন্দুতে এইরূপ কতকগুলি কোণ উৎপন্ন করে যাহাদের প্রারম্ভিক বাহু এবং প্রান্তিক বাহু একই স্থানে অবস্থান করে তবে উক্ত কোণগুলিকে **সম-প্রান্তিক** (Coterminal) কোণ বলে।

মনে কর, পার্শ্বের চিত্রে $\overline{OP}$ রেখাংশের আংশিক আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ধনাত্মক $\angle XOP=\theta$ অতএব উক্ত চিত্রানুযায়ী θ, $(2.180^\circ+\theta)$ এবং $-(2.180^\circ-\theta)$ কোণ তিনটি স্পষ্টতঃই সম-প্রান্তিক কোণ বলিয়া পরিগণিত হইবে। যদি n শূন্য অথবা কোন অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে $(n.180^\circ+\theta)$ সূত্রের দ্বারা লব্ধ কোণগুলি সম-প্রান্তিক কোণ হইবে। ইহা ব্যতীত দুইটি সম-প্রান্তিক কোণের বিয়োগফল সর্বদাই (2.180°)-এর যে কোন সরল গুণিতক হইবে।



কোণের পরিমাপ (Measurement of Angle) : ত্রিকোণমিতিতে তিনটি বিভিন্ন পদ্ধতিতে কোণের পরিমাপ নির্ণয় করা হয়। যথা—(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (Sexagesimal System), (ii) **শতক পদ্ধতি** (Centesimal System) এবং (iii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (Circular System)। এই পদ্ধতিগুলির একক নির্ণয়কল্পে সমকোণকে **প্রামাণ্য কোণ** (Standard Angle) বলিয়া গ্রহণ করা হইয়াছে। পদ্ধতিগুলি নিম্নে আলোচনা করা হইল।

(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি :** এই পদ্ধতি এক সমকোণকে 90টি সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক ডিগ্রি (1°) হিসাবে লওয়া হয়। এক ডিগ্রিকে পুনরায় 60টি সমান অংশে ভাগ করিলে প্রতিটি অংশকে এক মিনিট ($1'$) এবং

প্রত্যেক মিনিটকে 60টি সমান অংশে বিভক্ত করিলে প্রতিটি অংশকে এক সেকেণ্ড (1″) বলে। অতএব,

60 সেকেণ্ড (60″)=1 মিনিট (1′)
60 মিনিট (60′)=1 ডিগ্রী (1°)
90 ডিগ্রী (90°)=1 সমকোণ।

(ii) **শতক পদ্ধতি:** এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 100টি সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রতিটি অংশকে এক গ্রেড (1^g), এক গ্রেডকে 100টি সমান ভাগে ভাগ করিয়া প্রতিটি ভাগকে এক মিনিট ($1^`$) এবং এক মিনিটকে 100টি সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রতিটি অংশকে এক সেকেণ্ড ($1^{``}$) হিসাবে লওয়া হয়। অতএব,

100 সেকেণ্ড ($100^{``}$)=1 মিনিট ($1^`$)
100 মিনিট ($100^`$)=1 গ্রেড (1^g)
100 গ্রেড (100^g)=1 সমকোণ।

ষষ্টিক ও শতক-পদ্ধতির মধ্যে সম্বন্ধ:

সংজ্ঞানুসারে, 90°=1 সমকোণ এবং 100^g=1 সমকোণ।

$\therefore\ 90^\circ=100^g$ বা, $1^\circ=\frac{10^g}{9}$; অনুরূপে, $1^g=\frac{9^\circ}{10}$.

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. 0·35264 সমকোণকে গ্রেড, মিনিট এবং সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

উঃ 0·35264 সমকোণ$=(\cdot 35264\times 100)^g$ ($\because$ 1 সমকোণ$=100^g$)

$=35\cdot 264^g=35^g+\cdot 264^g=35^g+(\cdot 264\times 100)^`$ $(\therefore\ 1^g=100^`)$

$=35^g+(26\cdot 4)^`=35^g+26^`+\cdot 4^`=35^g+26^`+(\cdot 4\times 100)^{``}$

$=35^g+26^`+40^{``}=35^g 26^` 40^{``}$. $(\because\ 1^`=100^{``})$

উদা. 2. 115° 18′ 45″ কোণটিকে গ্রেড, মিনিট এবং সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

উঃ $115^\circ 18' 45''=115^\circ+18'+45''=115^\circ+18'+\frac{45}{60}'$

$=115^\circ+18'+\frac{3}{4}'=115^\circ+\frac{75'}{4}=115^\circ+\left(\frac{75}{4}\times\frac{1}{60}\right)^\circ$

$=115^\circ+\frac{5^\circ}{16}=\frac{1845^\circ}{16}=\left(\frac{1845}{16}\times\frac{10}{9}\right)^g$ $\left(\because\ 1^\circ=\frac{10^g}{9}\right)$

$=(128\frac{1}{8})^g=128^g+\frac{1}{8}^g=128^g+(\frac{1}{8}\times 100)^`$

$=128^g+(12\frac{1}{2})^`=128^g+12^`+\frac{1}{2}^`$

$=128^g+12^`+(\frac{1}{2}\times 100)^{``}=128^g+12^`+50^{``}=128^g 12^` 50^{``}$.

উদা. 3. $5^g\ 12^{`}\ 29^{``}$-কে ডিগ্রী, মিনিট এবং সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

উঃ $5^g\ 12^{`}\ 29^{``} = 5^g + 12^{`} + 29^{``} = 5^g + 12^{`} + (\frac{29}{100})^{`}$

$= 5^g + \frac{12\cdot29}{100}^{`} = 5^g + \left(\frac{1229}{100\times100}\right)^g = 5^g + \frac{1229}{10000}^g$

$= 5^g + \cdot1229^g = 5\cdot1229^g = \left(5\cdot1229\times\frac{9}{10}\right)^\circ$

$= 4\cdot61061^\circ = 4^\circ + \cdot61061^\circ = 4^\circ + (\cdot61061\times60)'$

$= 4^\circ + 36\cdot6366' = 4^\circ + (36 + \cdot6366)'$

$= 4^\circ + 36' + \cdot6366' = 4^\circ + 36' + (\cdot6366\times60)''$

$= 4^\circ + 36' + 38\cdot196'' = 4^\circ 36' 38\cdot196''$.

উদা. 4. দুইটি কোণের যোগফল 126° এবং বিয়োগফল 10^g ; কোণ দুইটিকে গ্রেড একককে প্রকাশ কর।

উঃ মনে কর, বৃহত্তর কোণটি x^g এবং ক্ষুদ্রতর কোণটি y^g.

এখানে, কোণ দুইটির যোগফল $=126^\circ = 126\times\frac{10^g}{9} = 140^g \quad \left(\because\ 1^\circ = \frac{10^g}{9}\right)$

$\therefore\quad x + y = 140 \qquad \ldots \qquad (i)$

আবার কোণ দুইটির বিয়োগফল $=80^g$

$\therefore\quad x - y = 80 \qquad \ldots \qquad (ii)$

$\therefore$ [(i) + (ii)] করিয়া, $2x = 220$ বা, $x = 110$

এখন (i) সমীকরণে $x = 110$ বসাইয়া, $y = 140 - x = 140 - 110 = 30$

$\therefore$ কোণ দুইটির নির্ণেয় মান যথাক্রমে 110^g এবং 30^g.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, একটি সুষম দশভুজের প্রতিটি কোণের গ্রেডের সংখ্যার এবং একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি কোণের ডিগ্রীর সংখ্যার অনুপাত 4 : 3.

উঃ n সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির যোগফল

$=(2n-4)$ সমকোণ।

$\therefore$ 10টি বাহু-বিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির যোগফল

$=(2.10-4)$ সমকোণ $=16$ সমকোণ।

যেহেতু সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণগুলি পরস্পর সর্বসম, অতএব সুষম দশভুজের প্রতিটি কোণ $=\frac{16 \text{ সমকোণ}}{10} = \frac{16}{10}\times90^\circ = 144^\circ$

এখন $1^{\circ}=\frac{10^{g}}{9}$; অতএব $144^{\circ}=144\times\frac{10^{g}}{9}=160^{g}$

আবার সুষম ষড়ভুজের অন্তঃকোণগুলির যোগফল $=(2.6-4)$ সমকোণ
$=8$ সমকোণ।

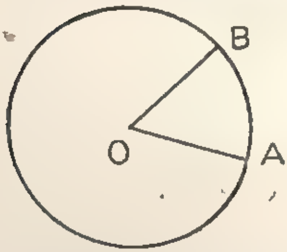
$\therefore$ সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি কোণ $=\frac{8 \text{ সমকোণ}}{6}=\frac{8}{6}\times 90^{\circ}=120^{\circ}$

$\therefore$ $\frac{\text{সুষম দশভুজের একটি কোণের গ্রেডের সংখ্যা}}{\text{সুষম ষড়ভুজের একটি কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা}}=\frac{160}{120}=\frac{4}{3}$.

বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System) :

কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ উহার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে **এক রেডিয়ান** (Radian) বলে।

মনে কর, O কেন্দ্রস্থ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং A বিন্দুটি উক্ত বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত যে কোন একটি বিন্দু। $\overline{AO}$ অঙ্কন করিয়া, $\overline{OA}$ রেখাংশের O বিন্দুতে AOB কোণটি এইরূপে অংকন করা হইল যাহাতে $\widehat{AB}$ চাপের দৈর্ঘ্য r-এর সমান হয়। তবে $\angle AOB$ স্পষ্টতঃই এক রেডিয়ান হইবে। এক রেডিয়ানকে সংক্ষেপে 1^{c} লেখা হয় এবং ইহাকে বৃত্তীয় কোণের এককরূপে গ্রহণ করা হইয়াছে।



উপরে অংকিত বৃত্তটির পরিধি $2\pi r$; অতএব, r দৈর্ঘ্যের চাপকে বৃত্তটির পরিধির উপর ধনাত্মক দিকে 2π বার স্থাপন করিলে উহা পরিধিকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করিবে। সংজ্ঞানুসারে, r দৈর্ঘ্যের চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে এক রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, বৃত্তের পরিধি উহার কেন্দ্রে 2π রেডিয়ান কোণ গঠন করিবে। অপরপক্ষে বৃত্তের পরিধি উহার কেন্দ্রে 360° কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ 2π রেডিয়ান $=360^{\circ}$

বা, 1 রেডিয়ান $=\frac{360^{\circ}}{2\pi}=\frac{180^{\circ}}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ। ... (1)

(1) নং শর্ত হইতে বলা যায় যে, যে-কোন বৃত্তের ক্ষেত্রেই রেডিয়ান কোণটির মান $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ হইবে। π এবং সমকোণ উভয়েই ধ্রুবক বলিয়া **'এক রেডিয়ান' একটি ধ্রুবক কোণ।**

ষষ্টিক এবং বৃত্তীয় পদ্ধতির মধ্যে সম্বন্ধ :

1 রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ ;

$\therefore$ π রেডিয়ান $=2$ সমকোণ $=180^\circ$ [(1) নং শর্ত হইতে]

1 রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3{\cdot}14159}$

$=57{\cdot}2958^\circ$ (প্রায়) $=57^\circ17'45''$ (প্রায়)

$\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=1$ রেডিয়ান ; $\therefore$ 1 সমকোণ $=\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান।

$\therefore$ $1^\circ=\frac{\pi}{2\times90}$ রেডিয়ান $=0{\cdot}017453$ রেডিয়ান।

$\therefore$ $1^\circ=\frac{0{\cdot}017453}{60}$ রেডিয়ান $=0{\cdot}00029$ রেডিয়ান।

দ্রষ্টব্য : কোণের পরিমাপের ক্ষেত্রে 'রেডিয়ান' একক-টি 'ডিগ্রী' অথবা 'গ্রেড' একক অপেক্ষা অধিক বাস্তবধর্মী বলিয়া গণিতশাস্ত্রে ইহার ব্যাপক প্রয়োগ দেখা যায়। যখন কোন কোণকে 'রেডিয়ান' এককে প্রকাশ করা হয় তখন সাধারণতঃ কোণটির মানের সহিত 'রেডিয়ান' অথবা উহার সংকেত 'c' উহ্য থাকে। উদাহরণস্বরূপ, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°...কোণগুলিকে যথাক্রমে $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$...রূপে প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে $\pi=\pi^c=\pi$ রেডিয়ান $=180^\circ$.

উদা. 6. কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে $\frac{4\pi}{15}$ এবং $\frac{8\pi}{27}$; ত্রিভুজটির কোণগুলিকে ষষ্টিক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

উঃ এক্ষেত্রে $\pi=180^\circ$ $\therefore$ $\frac{4\pi}{15}=\frac{4}{15}\times180^\circ=48^\circ$

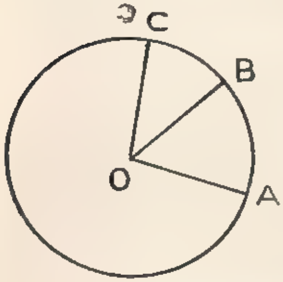
অনুরূপে $\frac{8\pi}{27}=\frac{8}{27}\times180^\circ=\frac{160^\circ}{3}=(53\frac{1}{3})^\circ=53^\circ20'$

$\therefore$ ত্রিভুজটির শীর্ষকোণ $=180^\circ-(48^\circ+53^\circ20')$

$=180^\circ-101^\circ20'=78^\circ40'$

উপপাদ্য : কোন বৃত্তের কোন চাপের দৈর্ঘ্য এবং উহার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মানের সমান হইবে।

উঃ। O-কে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল।



মনে কর, উক্ত বৃত্তের $\widehat{AB}$ চাপের দৈর্ঘ্য $= r$ এবং $\widehat{AC}$ চাপের দৈর্ঘ্য $= s$।

$\therefore$ $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান (সংজ্ঞানুসারে)।

যেহেতু, $\angle AOC$ এবং $\angle AOB$-এর অনুপাত উহাদের সম্মুখস্থ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান অতএব,

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AC} \text{ চাপের দৈর্ঘ্য}}{\widehat{AB} \text{ চাপের দৈর্ঘ্য}} \quad \therefore \quad \frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{s}{r} \text{ বা, } \angle AOC = \frac{s}{r} \times \angle AOB,$$

$\therefore$ $\angle AOC = \frac{s}{r}$ রেডিয়ান ... ... (i) [$\because$ $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান]

যদি $\angle AOC = \theta$ রেডিয়ান হয় তবে (i)নং শর্ত হইতে বলা যায় যে, θ রেডিয়ান $= \frac{s}{r}$ রেডিয়ান বা, $\theta = \frac{s}{r}$.

অর্থাৎ, কোন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণটির বৃত্তীয় মান $= \dfrac{\text{উক্ত কোণের সম্মুখস্থ চাপ}}{\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ}}$

উদা. 7. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 50 সে.মি.। উহার যে চাপ কেন্দ্রে 144° কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [$\pi = 3{\cdot}14$]

উঃ যেহেতু $180^\circ = \pi$ রেডিয়ান $\therefore$ $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$$\therefore \ 144^\circ = 144 \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = \frac{4\pi}{5} \text{ রেডিয়ান}$$

আবার, $\theta = \frac{s}{r}$ বা, $s = r\theta$ ... ... (1)

[এখানে θ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান।]

এখানে $r=50$ সে মি., $\theta=\dfrac{4\pi}{5}$ এবং $s=$ চাপের দৈর্ঘ্য $=$?

$\therefore$ (1) হইতে, $s=50\times\dfrac{4\pi}{5}$ সে.মি.

$=40\pi$ সে.মি. $=40\times3\cdot14$ সে. মি. $=125\cdot6$ সে. মি.

উদা. 8. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে.মি.; উহার 6 সে.মি. দৈর্ঘ্যের চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$.

[H. S. '61]

উঃ। মনে কর, 6 সে.মি. দৈর্ঘ্যের চাপ বৃত্তটির কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। এখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=r=10$ সে.মি. এবং বৃত্তের চাপ $=s=6$ সে.মি.।

আমরা জানি, $\theta=\dfrac{s}{r}$ বা, $\theta=\dfrac{6 \text{ সে.মি.}}{10 \text{ সে.মি.}}=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore$ উৎপন্ন কোণ $=\dfrac{3}{5}$ রেডিয়ান $=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$ $\left(\because \quad 1 \text{ রেডিয়ান}=\dfrac{180^\circ}{\pi}\right)$

$$=\frac{3\times36^\circ}{\frac{22}{7}}=\frac{3\times7\times36^\circ}{22}=\frac{378^\circ}{11}=34^\circ21\frac{9'}{11}$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ $=34^\circ21\dfrac{9'}{11}$.

উদা. 9. দুইটি বৃত্তের সমান সমান দৈর্ঘ্যের চাপ উহাদের কেন্দ্রে যথাক্রমে 60° এবং 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।

উঃ। এখানে $60^\circ=60\times\dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $=\dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান এবং

$75^\circ=75\times\dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $=\dfrac{5\pi}{12}$ রেডিয়ান। $\left(\because 1^\circ=\dfrac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}\right)$

মনে কর, r_1 এবং r_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের s দৈর্ঘ্যের চাপ উহাদের কেন্দ্রে যথাক্রমে $\dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান এবং $\dfrac{5\pi}{12}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{s}{r_1}$ বা, $\pi r_1=3s$ বা, $r_1=\dfrac{3s}{\pi}$ ... ... (i) $\left[\because \theta=\dfrac{s}{r}\right]$

আবার, $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{s}{r_2}$ বা, $5\pi r_2=12s$ বা, $r_2=\dfrac{12s}{5\pi}$ ... (ii

$$\text{এখন } \left\{\frac{\text{(i)}}{\text{(ii)}}\right\} \text{ করিয়া, } \frac{r_1}{r_2}=\frac{\left(\frac{3s}{\pi}\right)}{\left(\frac{12s}{5\pi}\right)}=\frac{3s}{\pi}\times\frac{5\pi}{12s}=\frac{5}{4}$$

∴ নির্ণেয় অনুপাত $=5:4$.

শতক এবং বৃত্তীয় পদ্ধতির মধ্যে সম্বন্ধ ঃ

$100^g=$ এক সমকোণ, $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $=$ এক সমকোণ।

∴ $100^g=\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান বা, $1^g=\frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান ; অর্থাৎ, $1^g=\frac{\pi^c}{200}$

আবার, $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $=100^g$ বা, 1 রেডিয়ান $=\left(\frac{200}{\pi}\right)^g$

অর্থাৎ $1^c=\left(\frac{200}{\pi}\right)^g$;

উদা. 10. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির বৃত্তীয় মানের অনুপাত $3:5:8$; বৃহত্তম কোণটির মান গ্রেডে প্রকাশ কর।

উঃ মনে কর, ত্রিভুজটির কোণগুলি যথাক্রমে $3x^c$, $5x^c$ এবং $8x^c$.

∴ $3x^c+5x^c+8x^c=\pi^c$ (∵ $\pi^c=2$ সমকোণ)

বা, $16x=\pi$. ∴ $x=\frac{\pi}{16}$

∴ ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণের মান $=8.\frac{\pi^c}{16}=\frac{\pi^c}{2}$

এখন, $1^c=\left(\frac{200}{\pi}\right)^g$ ∴ $\frac{\pi^c}{2}=\left(\frac{200}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\right)^g=100^g$.

∴ বৃহত্তম কোণটির নির্ণেয় মান $=100$ গ্রেড।

কোণের তিনটি পদ্ধতির এককের মধ্যে সম্বন্ধ ঃ পূর্বে আলোচিত পদ্ধতি তিনটি হইতে পাওয়া যায় যে,

$90^\circ=1$ সমকোণ ; $100^g=1$ সমকোণ ; $\pi^c=2$ সমকোণ।

∴ $1^\circ=\frac{1}{90}$ সমকোণ ... (i) ; $1^g=\frac{1}{100}$ সমকোণ ... (ii) ;

$1^c=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ ... (iii)

মনে কর, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাপ ষষ্টিক পদ্ধতিতে D^0, শতক পদ্ধতিতে G^g এবং বৃত্তীয় পদ্ধতিতে R^c.

এখন $D^0=\frac{D}{90}$ সমকোণ [(i) হইতে] ; $G^g=\frac{G}{100}$ সমকোণ [(ii) হইতে]

$R^c=\frac{2R}{\pi}$ সমকোণ [(iii) হইতে]

শর্তানুসারে, $D^0=G^g=R^c$ বা, $\frac{D}{90}$ সমকোণ $=\frac{G}{100}$ সমকোণ $=\frac{2R}{\pi}$ সমকোণ

$$\therefore \frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2R}{\pi}.$$

উদা. 11: একটি চতুর্ভুজের কোনগুলি যথাক্রমে x^0, $\frac{2x^0}{3}$, $\frac{10x^g}{9}$ এবং $\frac{2x^c}{3}$ হইলে x-এর মান কত ?

উঃ এখানে, $100^g=90^0$ বা, $1^g=\left(\frac{9}{10}\right)^0$;

$$\therefore \quad \frac{10x^g}{9}=\left(\frac{10x}{9}\times\frac{9}{10}\right)^0=x^0.$$

আবার $\pi^c=180^0$.

$$1^c=\frac{180^\circ}{\pi}\ ; \quad \therefore \quad \frac{2\pi^c}{3}=\left(\frac{2\pi}{3}\times\frac{180}{\pi}\right)^0=120^\circ$$

শর্তানুসারে, $x^\circ+\frac{2x^\circ}{3}+\frac{10x^g}{9}+\frac{2\pi^c}{3}=$ চার সমকোণ

বা, $x^\circ+\frac{2x^\circ}{3}+x^\circ+120^\circ=360^\circ$

বা, $\frac{8x}{3}=240 \quad \therefore \quad x=90.$

উদা. 12. কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণ অপেক্ষা $66\frac{2}{3}$ গ্রেড বেশী। যদি উহার ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রীর সংখ্যার এবং বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মানের সংখ্যার অনুপাত $60 : \pi$ হয় তবে ত্রিভুজের কোণগুলি ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

উঃ এখানে $100^g=90^\circ$ বা, $1^g=\left(\frac{9}{10}\right)^0$;

$$\therefore \quad \left(66\tfrac{2}{3}\right)^g=\left(66\tfrac{2}{3}\times\tfrac{9}{10}\right)^\circ=60^\circ$$

মনে কর, ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণটি x° এবং বৃহত্তম কোণটি $(x+60)^\circ$

এখন $180^\circ = \pi^c$, বা, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$; $\therefore$ $(x+60)^\circ = \frac{(x+60)\pi^c}{180}$

শর্তানুসারে, $\frac{\text{ক্ষুদ্রতম কোণটির ডিগ্রীর সংখ্যা}}{\text{বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মানের সংখ্যা}} = \frac{60}{\pi}$

বা, $\frac{x}{\frac{(x+60)\pi}{180}} = \frac{60}{\pi}$ বা, $\frac{180x}{(x+60)\pi} = \frac{60}{\pi}$

বা, $\frac{3x}{x+60} = 1$ বা, $3x = x+60$ $\therefore$ $x = 30$

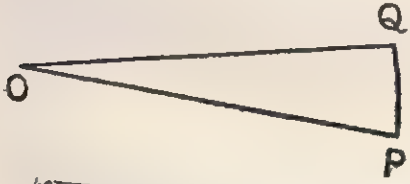
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ $= x^\circ = 30^\circ$, বৃহত্তম কোণ $= (x+60)^\circ = 90^\circ$

এবং অবশিষ্ট কোণ $= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60$

বিবিধ :

উদা. 13. $5\frac{1}{2}$ ফুট উচ্চ একজন লোককে আধ মাইল দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে দেখিলে ঐ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহার পরিমাণ বৃত্তীয় পদ্ধতিতে নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$

উঃ মনে কর, PQ লোকটির অবস্থান এবং O পর্যবেক্ষণ বিন্দু।



$PQ = 5\frac{1}{2}$ ফুট $= \frac{11}{2}$ ফুট,
OQ = পর্যবেক্ষণ বিন্দু হইতে লোকটির দূরত্ব $= \frac{1}{2}$ মাইল $= \frac{1}{2} \times 1760 \times 3$ ফুট $= 2640$ ফুট।

এক্ষেত্রে PQ-এর দৈর্ঘ্য OQ-এর তুলনায় খুবই ক্ষুদ্র। এইজন্য PQ-কে OQ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষুদ্রচাপ বলিয়া ধরিতে পারি। $\therefore$ PQ = বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{11}{2}$ ফুট এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 2640$ ফুট।

মনে কর, $\angle POQ = \theta$ রেডিয়ান।

$\therefore$ $\theta = \frac{\text{বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$ $\left(\because \theta = \frac{s}{r}\right)$

$= \frac{\frac{11}{2}}{2640} = \frac{1}{480}$

$\therefore$ $\angle POQ = \frac{1}{480}$ রেডিয়ান $= \frac{1}{480} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী $= \frac{21}{176}$ ডিগ্রী $= 7'9\frac{6}{11}''$

উদা. 14. চন্দ্রের ব্যাস পৃথিবীপৃষ্ঠে $31'$ কোণ উৎপন্ন করে, যদি চন্দ্রের ব্যাস 2160 মাইল হয়, তবে পৃথিবী হইতে চন্দ্রের দূরত্ব কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$

উঃ মনে কর, চন্দ্রের কেন্দ্রবিন্দু O এবং ব্যাস AB [চিত্র নিজে আঁক ।]

AB ব্যাস পৃথিবীর পৃষ্ঠে অবস্থিত P বিন্দুতে $31'$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

$\therefore \quad \angle APO=\frac{1}{2}.31'=(\frac{1}{2}\times\frac{31}{60})^\circ=\left(\frac{31\pi}{2\times60\times180}\right)$ রেডিয়ান।

এখানে AO = চন্দ্রের ব্যাসার্ধ $=\frac{2160}{2}$ মাইল $=1080$ মাইল এবং OP = পৃথিবী পৃষ্ঠ হইতে চন্দ্রের কেন্দ্রবিন্দুর দূরত্ব। যেহেতু OP-এর তুলনায় OA খুবই ক্ষুদ্র অতএব OA-কে OP ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের ক্ষুদ্রচাপ বলিয়া গণ্য করা যাইতে পারে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $\theta=\frac{31\pi}{2\times60\times180}$, $s=OA=1080$ মাইল এবং $r=OP=?$

এখন $\theta=\frac{s}{r}$ বা, $\theta.r=s$ বা, $r.\frac{31\pi}{2\times60\times180}=1080$ মাইল।

বা, $r=\frac{1080\times2\times60\times180}{31\times\frac{22}{7}}$ মাইল ($\because \pi=\frac{22}{7}$)

বা, $r=239436{\cdot}9$ মাইল।

উদা. 15. কোন বিমানের চালনচক্রের কেন্দ্র হইতে উহার ফলকের অগ্রভাগের দূরত্ব 74 সে. মি. এবং চক্রটি প্রতি মিনিটে 2400 বার আবর্তিত হয়। প্রতি সেকেণ্ডে ফলকটির অগ্রভাগ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। $(\pi=3{\cdot}142)$

উঃ এক সেকেণ্ডে চক্রটির আবর্তন সংখ্যা $=\frac{2400}{60}=40$

এক্ষেত্রে চক্রটির ব্যাসার্ধ $=r=74$ সে. মি. এবং পরিধি $=2\pi r$.

$=2\times3{\cdot}142\times74$ সে. মি. $=465{\cdot}016$ সে. মি.

$\therefore$ চক্রটির একটি আবর্তনে উহার ফলকের অগ্রভাগ $465{\cdot}016$ সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিবে।

$\therefore$ 40টি আবর্তনে ফলকের অগ্রভাগ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $=465{\cdot}016\times40$ সে. মি. $=186{\cdot}0064$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=186{\cdot}0064$ মিটার।

উদা. 16. কাশ্মীর কন্যাকুমারীর উত্তরে অবস্থিত এবং উহাদের অক্ষাংশ যথাক্রমে 37°N এবং 8°N ; পৃথিবীর ব্যাস $12870{\cdot}9$ কি. মি. হইলে কন্যাকুমারী হইতে কাশ্মীরের দূরত্ব নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$

উঃ মনে কর, কাশ্মীর ও কন্যাকুমারীর মধ্যবর্তী স্থানের চাপের চাপের দৈর্ঘ্য $= s$.

$\therefore$ s দৈর্ঘ্যের চাপদ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ$=(37^\circ-8^\circ)=29^\circ$.

এখন $1^\circ=\frac{\pi^c}{180}$ বা, $29^\circ=\frac{29\pi^c}{180}$.

এখানে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ$=r=\frac{1}{2}\times 12870{\cdot}9$ কি. মি. এবং স্থান দুইটির মধ্যবর্তী চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের বৃত্তীয় মান$=\theta=\frac{29\pi}{180}$.

এখন $s=r.\theta$ বা, $s=\frac{1}{2}\times 12870{\cdot}9\times\frac{29}{180}\times\frac{22}{7}$ কিলোমিটার

$=\frac{1}{2}\times 6517{\cdot}17$ কিলোমিটার

$=3258{\cdot}585$ কিলোমিটার।

$\therefore$ কন্যাকুমারী হইতে কাশ্মীরের দূরত্ব$=3258{\cdot}585$ কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 1

1. জ্যামিতিক কোণ এবং ত্রিকোণোমিতিক কোণের সংজ্ঞা দাও। সম-প্রান্তিক কোণ কাহাকে বলে ?

2. (a) রেডিয়ানের সংজ্ঞা লিখ। প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ। ইহার মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(b) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটাটি (i) 50 মিনিটে এবং (ii) 6 ঘণ্টায় কত রেডিয়ান ঘুরিবে ?

3. একটি কোণের ডিগ্রী, এবং রেডিয়ানের সংখ্যা যথাক্রমে x, y এবং z হইলে দেখাও যে, $\frac{x}{90}=\frac{y}{100}=\frac{2z}{\pi}$.

4. নিম্নলিখিত কোণগুলিকে গ্রেড, মিনিট এবং সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :

(i) 45° (ii) $1{\cdot}32579$ সমকোণ (iii) $96^\circ45'$ (iv) $-37^\circ10'12''$

(v) $113^\circ33'25\frac{5}{7}''$ (vi) $\frac{3\pi^c}{4}$ (vii) $-\frac{\pi^c}{8}$ (viii) $\frac{19\pi^c}{18}$.

5. নিম্নলিখিত কোণগুলিকে ডিগ্রী, মিনিট এবং সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :—

(i) 45^g (ii) $30^g25^`$ (iii) $-81^g30^`75^{``}$ (iv) $240^g28^`64^{``}$

(v) $\frac{2\pi^c}{3}$ (vi) $-\frac{4\pi^c}{5}$ (vii) $\frac{7\pi^c}{36}$ (viii) $3{\cdot}14\pi^c$.

6. নিম্নলিখিত কোণগুলিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

(i) $22\frac{1}{2}^\circ$ (ii) 110° (iii) $48^\circ 15'$ (iv) $-213^\circ 37'$ (v) $52^\circ 27' 10''$ (vi) 150^g (vii) $41^g 22^\backprime 50^{\backprime\backprime}$ (viii) -85 $33^\backprime 33'3^{\backprime\backprime}$.

7. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 3 : 5 :7 ; উহার কোণগুলিকে ডিগ্রী এককে প্রকাশ কর।

8. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি ভূমি-সংলগ্ন কোণ শীর্ষ কোণের 12 গুণ। উহার কোণগুলিকে ডিগ্রী মিনিটে প্রকাশ কর।

9. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 : 4 হইলে শতক পদ্ধতিতে কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

10. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 5 : 3; ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটিকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। [C. U. '42]

11. কোন ত্রিভুজের কোণ দুইটি যথাক্রমে $37^g 25^\backprime$ এবং $52^g 75^\backprime$ হইলে তৃতীয় কোণটিকে ষষ্টিক ঘটিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

12. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\frac{2\pi^c}{5}$ এবং 8° ; উহার তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান বাহির কর।

13. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ 60° এবং অপর কোণটি $\frac{\pi^c}{4}$; তৃতীয় কোণটির মান শতক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

14. যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের বৃত্তীয়মান যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ হয়, তবে তৃতীয় কোণটি ষষ্টিক মান নির্ণয় কর।

15. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের বিয়োগফল $\frac{2\pi^c}{5}$, কোণ দুইটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

16. দুইটি কোণের বিয়োগফল 1° এবং উহাদের বৃত্তীয় মানের যোগফল 1 রেডিয়ান, কোণ দুইটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

17. দুইটি কোণের যোগফল 135° এবং উহাদের বিয়োগফল 100 ; কোণ দুইটির ষষ্টিক এবং বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

18. দুইটি কোণের যোগফল $\frac{5\pi^c}{8}$ এবং উহাদের বিয়োগফল $120^g 50^\backprime$; ডিগ্রী-মিনিটে কোণ দুইটিকে প্রকাশ কর।

14. $\sin^2\theta+\sin^4\theta=1$ হইলে দেখাও যে $\tan^4\theta-\tan^2\theta=1$.

15. $5\tan\theta=4$ হইলে $\dfrac{6\sin\theta-3\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

16. $\tan\theta=\dfrac{p}{q}$ হইলে $\dfrac{p\sin\theta-q\cos\theta}{p\sin\theta+q\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

17. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$ রাশিটিকে $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

18. $x=a\sec\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ হইলে দেখাও যে $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

19. $\sin\theta+\cos\theta=p$ এবং $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=q$ হইলে দেখাও যে $q(p^2-1)=2p$.

20. $\tan\theta+\sin\theta=m$ এবং $\tan\theta-\sin\theta=n$ হইলে দেখাও যে $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

21. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হইলে দেখাও যে $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

তৃতীয় অধ্যায়

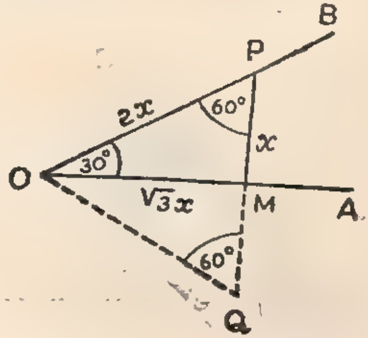
কয়েকটি কোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of certain angles)

30°, 45°, 60°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে জ্যামিতিক উপায়ে নির্ণয় করা যায়। নিম্নে ঐ সকল কোণানুপাতগুলির নির্ণয় প্রণালী দেওয়া হইল।

30°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOB=30^\circ$; উহার $\overline{OB}$ বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু P লওয়া হইল যাহাতে $OP=2x$ হয়। এখন P-বিন্দু হইতে $\overline{OA}$ বাহুর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। অতএব $\angle OPM=60^\circ$।

এখন $\overline{PM}$-কে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন $PM = MQ$ হয়। $\overline{OQ}$ অঙ্কন করা হইল। এক্ষেত্রে $\triangle POM$ এবং $\triangle QOM$ সর্বসম।



$\therefore \angle OQM = 60°$.

$\therefore$ OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore OP = PQ$.

বা, $2x = 2.PM$

বা, $PM = x$.

এখন, $\triangle OPM$-এর ক্ষেত্রে,

$PM^2 + OM^2 = OP^2$.

বা, $x^2 + OM^2 = (2x)^2$

বা, $OM^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

$\therefore OM = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}.x$

$$\therefore \sin 30° = \frac{PM}{OP} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30° = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}.x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PM}{OM} = \frac{x}{\sqrt{3}.x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\cot 30° = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}.x}{x} = \sqrt{3}.$$

$$\sec 30° = \frac{OP}{OM} = \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{OP}{PM} = \frac{2x}{x} = 2.$$

45°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOB = 45°$, উহার $\overline{OA}$ বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু M লওয়া হইল যাহাতে $OM = x$ হয়। এখন $\overline{OA}$ বাহুর M বিন্দুতে উহার উপর লম্ব অঙ্কন করা হইল। উক্ত লম্ব রেখাটি $\overline{OB}$ বাহুকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইল সমকোণী ত্রিভুজ POM-এর $\angle OPM = 45°$ হইবে।

19. দুইটি কোণের যোগফল 114° ; যদি উহাদের একটি কোণের গ্রেডের মান অন্যটির ডিগ্রীর মানের মানের সমান হয়, তবে কোণগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

20. 138°-কে এরূপ তিনটি অংসে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশটি দ্বিতীয় অংশ অপেক্ষা $\frac{\pi^c}{12}$ কম এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় অংশের যোগফল 120^g হয়।

21. প্রমাণ কর যে, সুষম দশভুজের একটি কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা এবং সুষম পঞ্চভুজের একটি কোণের গ্রেডের সংখ্যার অনুপাত 6 : 5.

22. দেখাও যে, একটি সুষম নবভুজের প্রতিটি কোণের ডিগ্রীর সংখ্যার এবং একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি কোণের বৃত্তীয় মানের সংখ্যার অনুপাত 735 : 11.

23. একটি বৃত্তের ব্যাস 48 মিটার। উহার কত দৈর্ঘ্যের চাপ কেন্দ্রে 105° কোণ গঠন করিবে ?

24. 5 ফুট ব্যাসযুক্ত কোন বৃত্তের 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের চাপ উহার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ডিগ্রী ও মিনিটে প্রকাশ কর।

25. 6 ফুট ব্যাস বিশিষ্ট কোন বৃত্তের বেড় 15′ অন্তর রেখা দ্বারা বিভক্ত আছে। উহার একটি রেখা হইতে পরবর্তী রেখার দূরত্ব (ইঞ্চিতে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর।

26. কোন বৃত্তের 100 সে. মি. দৈর্ঘ্যের চাপ উহার কেন্দ্রে 51° কোণ উৎপন্ন করিল। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

27. যদি একটি কোণ, x^0 অথবা y^g অথবা z^c হয় তবে দেখাও যে, $y-x=\frac{20z}{\pi}$.

[D. B. '59]

28. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ $\frac{2x}{3}$ গ্রেড, অপর একটি কোণ $\frac{2x}{3}$ ডিগ্রী এবং তৃতীয় কোণটি $\frac{\pi x}{75}$ রেডিয়ান হইলে কোণগুলিকে ডিগ্রী এককে প্রকাশ কর।

29. একই সংখ্যাদ্বারা কোন ত্রিভুজের কোণগুলির একটিকে ডিগ্রীতে, অপরটিকে গ্রেডে এবং অবশিষ্টকে বৃত্তীয় মানে প্রকাশ করা যায়। কোনগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

30. 800 মিটার দূরে অবস্থিত একটি গাছ কোন বিন্দুতে 3° কোণ উৎপন্ন করিল গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

31. চন্দ্র পৃথিবীর উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে 31° কোণ উৎপন্ন করে ; পৃথিবী হইতে চন্দ্রের দূরত্ব 239,000 মাইল হইলে চন্দ্রের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

32. থরমরুভূমির (অক্ষাংশ 28°N) বোম্বের (অক্ষাংশ 19°N) উত্তরে অবস্থিত। যদি পৃথিবীর ব্যাস 12870·9 কিলোমিটার হয় তবে বোম্বে হইতে থর মরুভূমির দূরত্ব কত ?

33. একটি মোটরের প্রত্যেকটি চাকার ব্যাসার্ধ 42 সে.মি. ; চলন্ত মোটরটির চাকা মিনিটে 375 বার ঘুরিলে মোটরটির গতিবেগ কত হইবে ?

34. একটি জাহাজের চালনচক্রের কেন্দ্র হইতে উহার ফলকের প্রান্তভাগের দূরত্ব 5·5 মিটার। চক্রটি প্রতি মিনিটে 1000 বার আবর্তিত হইলে ফলকের অগ্রভাগটি প্রতি সেকেণ্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করে।

35. বিবেকানন্দ রোড এবং বিধান সরণীর সংযোগস্থলে উৎপন্ন বাঁকটি 252 মিটার ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্তের 44 মিটার দৈর্ঘ্যের চাপের সমান ; বাঁকটি অতিক্রম করিতে একটি গাড়ীকে কত ডিগ্রী কোণে ঘুরিতে হইবে !

36. মনে কর, চন্দ্র নির্দিষ্ট রৈখিকবেগে পৃথিবীর চতুর্দিকে একটি বৃত্তীয় কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করে। ঐ কক্ষপথটি সম্পূর্ণরূপে ঘুরিয়া আসিতে উহার $27\frac{1}{3}$ দিন সময় লাগে। যদি কক্ষপথটির ব্যাসার্ধ 384552 কিলোমিটার হয় তবে চন্দ্রের রৈখিক বেগ কি.মি /সেকেণ্ড এ নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

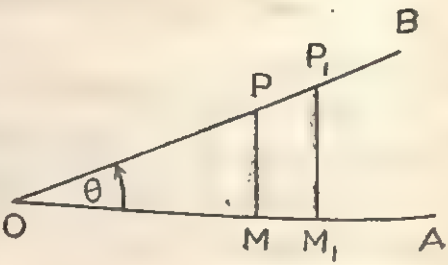
সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

[Trigonometrical ratios of an acute angle]

মনে কর, ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ AOB-এর প্রারম্ভিক বাহু $\overline{OA}$ এবং প্রান্তিক বাহু $\overline{OB}$। ইহার $\overline{AB}$ বাহুর উপরিস্থিত P বিন্দু হইতে $\overline{OA}$ বাহুর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। অতএব $\triangle POM$ সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

এক্ষেত্রে দেখান হইবে যে, $\angle AOB$-এর প্রান্তিক বাহু $\overline{OB}$-এর উপর P বিন্দুর অবস্থান যে-কোন স্থানে হউক না কেন $\frac{PM}{OP}$, $\frac{OM}{OP}$ এবং $\frac{PM}{OM}$ অনুপাত তিনটির প্রত্যেকটির মান ধ্রুবক হইবে।

প্রমাণ : $\overline{OB}$ বাহুর উপর P ভিন্ন অপর যে কোন একটি বিন্দু P_1 লওয়া হইল। P_1 হইতে $\overline{OA}$-এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল।



এখন ΔPOM এবং ΔP_1OM_1 এর মধ্যে,

$\angle POM \cong \angle P_1OM_1$ (সাধারণ কোণ) এবং $\angle PMO \cong \angle P_1M_1O$ (প্রত্যেকে সমকোণ)।

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle OPM \cong$ অবশিষ্ট $\angle OP_1M_1$.

$\therefore$ ΔPOM এবং ΔP_1OM_1 সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} = \frac{OP}{OP_1}$$

এখন, $\dfrac{PM}{P_1M_1} = \dfrac{OP}{OP_1}$; $\therefore$ $\dfrac{PM}{OP} = \dfrac{P_1M_1}{P_1O}$ ... (i)

$\dfrac{OM}{OM_1} = \dfrac{OP}{OP_1}$; $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM_1}{OP_1}$ ... (ii)

$\dfrac{PM}{P_1M_1} = \dfrac{OM}{OM_1}$ $\therefore$ $\dfrac{PM}{OM} = \dfrac{P_1M_1}{OM_1}$ ... (iii)

$\therefore$ (i), (ii) এবং (iii) হইতে বলা যায় যে, $\dfrac{PM}{OP}$, $\dfrac{OM}{OP}$ এবং $\dfrac{PM}{OM}$-এর প্রত্যেকটি অনুপাতই ধ্রুবক এবং উহাদের মান $\angle AOB$-এর প্রান্তিক বাহুর উপরিস্থিত P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভরশীল নয়।

দ্রষ্টব্য : যেহেতু $\dfrac{PM}{OP} = \dfrac{P_1M_1}{OP_1}$; $\therefore$ $\dfrac{OP}{PM} = \dfrac{OP_1}{P_1M_1}$

$\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM_1}{OP_1}$; $\therefore$ $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{OP_1}{OM_1}$

$\dfrac{PM}{OM} = \dfrac{P_1M_1}{OM_1}$; $\therefore$ $\dfrac{OM}{PM} = \dfrac{OM_1}{P_1M_1}$

এক্ষেত্রে $\dfrac{OP}{PM}$, $\dfrac{OP}{OM}$ এবং $\dfrac{OM}{PM}$ অনুপাত তিনটিও ধ্রুবক হইবে

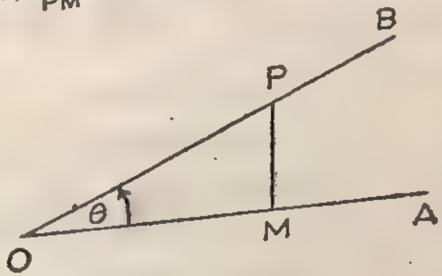
$\therefore$ ΔPOM-এর $\angle POM$ অপরিবর্তিত থাকিলে $\dfrac{PM}{OM}$, $\dfrac{OM}{OP}$, $\dfrac{PM}{OP}$,

$\frac{OP}{PM}$, $\frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OM}{PM}$ অনুপাত ছয়টি ধ্রুবক হইবে। এখন ঐ অনুপাতগুলি প্রত্যেকে দৈর্ঘ্যের অনুপাত ; অতএব উহারা নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা হইবে। এই ধনাত্মক সংখ্যাগুলি সূক্ষ্মকোণের নির্দিষ্ট পরিমাপের জন্যে ধ্রুবক বলিয়া উহাদের মান সূক্ষ্মকোণটির মানের উপর নির্ভরশীল।

ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত (Trigonometrical ratios) :

সংজ্ঞা : $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ।

এখন $\frac{PM}{OP}$, $\frac{OM}{OP}$, $\frac{PM}{OM}$, $\frac{OM}{PM}$, $\frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OP}{PM}$ অনুপাতগুলিকে সূক্ষ্মকোণ POM-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত (Trigonometrical ratios) বলে। $\angle POM$ এর পরিমাণ θ (থিটা) হইলে ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলি নিম্নরূপ হইবে :—



sine $\theta=\frac{PM}{OP}$, cosine $\theta=\frac{OM}{OP}$, tangent $\theta=\frac{PM}{OM}$,

cotangent $\theta=\frac{OM}{PM}$, secant $\theta=\frac{OP}{OM}$ এবং cosecant $\theta=\frac{OP}{PM}$.

sine θ, cosine θ tangent θ, cotangent θ, secant θ এবং cosecant θ-কে সংক্ষেপে যথাক্রমে sin θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ এবং cosec θ লেখা হয়। বুঝিবার সুবিধার জন্যে $\triangle POM$-এর POM-কোণের সাপেক্ষে $\overline{PM}$-কে বিপরীত বাহু; $\overline{OM}$-কে সন্নিহিত বাহু এবং $\overline{OP}$-কে অতিভুজ ধরিয়া ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয় :

$\sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{\text{বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}$; $\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{\text{সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}$

$\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{\text{বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য}}$; $\cot\theta=\frac{OM}{PM}=\frac{\text{সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য}}$

$\sec\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}{\text{সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য}}$; $\text{cosec}\,\theta=\frac{OP}{PM}=\frac{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}{\text{বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য}}$

দ্রষ্টব্য : (i) নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা হইবে। (ii) ত্রিকোণমিতিতে $\angle$POM বলিতে ঐ কোণের পরিমাপকে বুঝাইবে।

ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ :

(*a*) সংজ্ঞানুসারে, (i) $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{OP}{PM}$

$\therefore\ \sin\theta\times\operatorname{cosec}\theta=1$

$\sin\theta=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$.

(ii) $\cos\theta=\dfrac{OM}{OP}$ এবং $\sec\theta=\dfrac{OP}{OM}$.

$\therefore\ \cos\theta\times\sec\theta=1$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

(iii) $\tan\theta=\dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta=\dfrac{OM}{PM}$

$\therefore\ \tan\theta\times\cot\theta=1$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(iv) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}=\dfrac{PM}{OM}=\tan\theta$

এবং $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\frac{OM}{OP}}{\frac{PM}{OP}}=\dfrac{OM}{PM}=\cot\theta$

(*b*) ΔPOM এর $\angle$PMO সমকোণ।

$\therefore\ PM^2+OM^2=OP^2$ ... .. (1)

(i) এখন (1) নং শর্তটির উভয়পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{PM^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=1 \quad \text{বা,} \quad \left(\frac{PM}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=1$$

বা, $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ (সংজ্ঞানুসারে)

বা, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore$ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ বা, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

এবং $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ বা, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

(ii) (1) নং শর্তটির উভয়পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\frac{PM^2}{OM^2}+1=\frac{OP^2}{OM^2}$ বা, $\left(\frac{PM}{OM}\right)^2+1=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

বা, $(\tan\theta)^2+1=(\sec\theta)^2$

বা, $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\therefore$ $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$

এবং $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ বা, $\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}$

(iii) (1) নং শর্তটির উভয়পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$1+\frac{OM^2}{PM^2}=\frac{OP^2}{PM^2}$ বা, $1+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2=\left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

বা, $1+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2$

বা, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}$ এবং $\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$

বা, $\cot\theta=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$

দ্রষ্টব্য : $(\sin\theta)^2$-কে সংক্ষেপে $\sin^2\theta$-দ্বারা লেখা হয় ; কিন্তু $(\sin\theta)^2$ এর পরিবর্তে $\sin\theta^2$ লেখা হয় না।

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. দেখাও যে $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

উঃ $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \qquad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$$

উদা. 3. দেখাও যে $\cos^2 A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

[A-যে কোন সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ]

উঃ $\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A-\cos^2 A.\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$$=\cos^2 A\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\frac{1}{\sec^2 A}\left[1-\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2\right]\quad\left[\because\ \cos A=\frac{1}{\sec A}\right]$$

$$=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\quad\left[\because\ \sec^2 A=1+\tan^2 A\ \text{এবং}\ \frac{\sin A}{\cos A}=\tan A\right]$$

উদা. 4 প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta-1}+\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta+1}=2\sec^2\theta$

উঃ $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta-1}+\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta+1}=\operatorname{cosec}\theta\left(\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-1}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+1}\right)$

$$=\operatorname{cosec}\theta\left\{\frac{+\operatorname{cosec}\theta-1}{(\operatorname{cosec}\theta-1)(\operatorname{cosec}\theta+1)}\right\}$$

$$=\frac{2\operatorname{cosec}^2\theta}{\cot^2\theta}\quad[\because\ \operatorname{cosec}^2\theta-1=\cot^2\theta]$$

$$=\frac{2\times\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)}=\frac{2}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta.$$

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}$

[এখানে A এবং B সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ]

উঃ $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}$

$=\dfrac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)+(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A-\sin B)}$

$=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A-\sin B)}$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A-(\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A-\sin B)}$

$=\dfrac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A-\sin B)}=0.$

প্রশ্নমালা 2

প্রমাণ কর :

1. $\sin\theta\sec\theta\cot\theta=1$
2. $\cos\theta+\sin\theta\tan\theta=\sec\theta$
3. $\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta\tan\theta}{\cos\theta}=5\tan\theta$
4. $\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)=\tan^2\theta$
5. $3\tan^2\theta+4\sec^2\theta=7\sec^2\theta-3$
6. $\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta\cos\theta=\sin\theta$
7. $\dfrac{1}{\cot\theta+\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$
8. $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\sin\theta$
9. $\dfrac{1+\cot\theta+\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$
10. $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta}=\sin\theta+\cos\theta$
11. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}=1+\sin\theta$
12. $(2\sin\theta+3\cos\theta)^2+(3\sin\theta-2\cos\theta)^2=13$
13. $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta)+\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=2$
14. $\dfrac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{1-\tan^4\theta}=\cos^4\theta$
15. $\cos^6\theta+\sin^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$
16. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

17. $\cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

18. $\cot^2 A \operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A - \cot^2 B$

19. $\dfrac{\sin^2\theta + 2}{\sin^2\theta - 2} = \dfrac{1 - 3\sec^2\theta}{1 + \sec^2\theta}$ 20. $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1$

21. $\dfrac{\sec^2\theta - 5}{\sec^2\theta - 6\tan\theta + 7} + \dfrac{\tan\theta + 2}{\tan\theta - 4}$

22. $\dfrac{1 + \cos\theta + \sin\theta}{1 + \cos\theta - \sin\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

23. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

24. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ 25. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = (\sec\theta + \tan\theta)^2$

26. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$ 27. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

28. $\cos\theta + \dfrac{\tan\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 1 + \sec\theta$

29. $\dfrac{\tan\theta}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = \sec\theta + \cos\theta$

30. $\sin\theta\,(1 + \tan\theta) + \cos\theta\,(1 + \cot\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$

31. $(1 + \cot\theta + \tan\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = \dfrac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec^2\theta}$

32. $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

33. $(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - \sin^2\theta\cos^2\theta) = \sin^6\theta - \cos^6\theta$

সরল কর :

34. $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta}$

35. $\dfrac{\sec^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta}{\operatorname{cosec}^4\theta - 2\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta + \cot^4\theta}$

36. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} + \dfrac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}$

37. $\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1} - \dfrac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

38. $\dfrac{\sec A-\sec B}{\tan A-\tan B}-\dfrac{\tan A+\tan B}{\sec A+\sec B}$

39. $2\cot\theta-\sec\theta\operatorname{cosec}\theta\,(1-2\sin^2\theta)$

40. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1$

41. $(\sec A\sec B+\tan A\tan B)^2-(\sec A\tan B+\tan A\sec B)^2$

দেখাও যে :

42. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

43. $\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

44. $\dfrac{\cot A+\operatorname{cosec} B}{\tan B+\tan A\sec B}=\cot A\cot B$

45. $\sec^2\theta\tan\theta+2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{cosec}^2\theta\cot\theta=\sec^3\theta\operatorname{cosec}^3\theta$

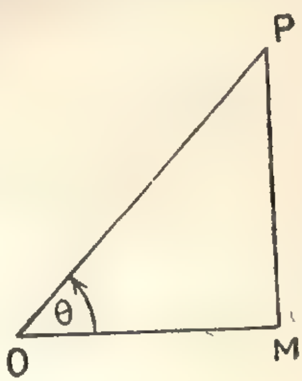
46. $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

47. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}-\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}\theta-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

48. $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cot\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta.$

নিম্নে ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধীয় কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল। [উদাহরণগুলিতে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ]

উদা. 1. $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt2}$ হইলে $\cos\theta$, $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় কর।



উঃ মনে কর, $\triangle$POM-এর PMO কোণ সমকোণ এবং $\angle$POM-এর পরিমাপ θ.

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$; কিন্তু $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt2}$.

$\therefore\ \dfrac{PM}{OP}=\dfrac{1}{\sqrt2}$, মনে কর $PM=a$.

$\therefore\ OP=\sqrt2 a$.

এখন $(PM)^2+(OM)^2=(OP)^2$

বা, $(OM)^2=(OP)^2-(PM)^2$

বা, $(OM)^2=(\sqrt{2}a)^2-a^2=2a^2-a^2=a^2$.

$\therefore$ $OM=a$.

$\therefore$ $\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$

এবং $\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{a}{a}=1$

বিকল্প পদ্ধতি : $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ইত্যাদি।

উদা. 2. $x\sin\theta-\cos\theta=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

উঃ এখানে $x\sin\theta-\cos\theta=0$ বা, $x\sin\theta=\cos\theta$.

বা, $x\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$ [উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x\tan\theta=1$ বা, $\tan\theta=\frac{1}{x}$

এখন, $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

বা, $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

উদা. 3. যদি $\sin A=\frac{3}{5}$ এবং $\cos B=\frac{12}{13}$ হয় তবে $\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$-এর মান কত হইবে ? (A এবং B উভয়েই ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)

উঃ। এখানে $\sin A=\frac{3}{5}$ বা, $\sin^2 A=\frac{9}{25}$;

$\therefore$ $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3/5}{4/5}=\frac{3}{4}$

আবার, $\cos B=\frac{12}{13}$ বা, $\cos^2 B=\frac{144}{169}$

$\therefore$ $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$;

$\therefore \quad \tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{5/13}{12/13} = \dfrac{5}{12}$

এখন, $\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{21}{16}} = \dfrac{16}{63}$

প্রশ্নমালা 3

[এখানে θ, A এবং B-এর প্রত্যেকটিকে সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ ধরিয়া প্রশ্নগুলির সমাধান কর]

1. $\cos \theta = \frac{2}{3}$ হইলে $\tan \theta$, $\sec \theta$ এবং $\operatorname{cosec} \theta$-এর মান নির্ণয় কর।

2. $\sin \theta = \frac{1}{2}$ হইলে $\cos \theta$, cot   এবং $\tan \theta$-এর মান নির্ণয় কর।

3. $\tan \theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে sin   এবং $\cos \theta$-এর মান নির্ণয় কর।

4. $\sin \theta - a \cos \theta = 0$ হইলে দেখাও যে $\operatorname{cosec} \theta = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$

5. $\cot \theta = \sqrt{3}$ হইলে $\dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{3 \sin^2\theta + \cos^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $\sin\theta = x$ হইলে দেখাও যে, $\cos \theta + \tan \theta = \dfrac{1 + x - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

7. $\tan\theta = x$ হইলে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে x-এর সাপেক্ষে প্রকাশ কর।

8. $\sin \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে $4 \sec \theta + 3 \cot^2\theta - 3 \tan^2\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

9. $\tan \theta + \cot \theta = 2$ হলে দেখাও যে, $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$.

10. $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{x}$ হইলে দেখাও যে, $\sin \theta = \dfrac{x-1}{x+1}$.

11. $\sin A = \dfrac{1}{5}$ এবং $\cos B = \dfrac{5}{13}$ হইলে $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ এর মান নির্ণয় কর।

13. $\cos A = \dfrac{1}{2}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে $\dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ এর মান নির্ণয় কর।

13. $\operatorname{cosec} \theta + \sin \theta = 2$ হইলে দেখাও যে, $\sin^7\theta + \operatorname{cosec}^7\theta = 2$.

14. $\sin^2\theta+\sin^4\theta=1$ হইলে দেখাও যে $\tan^4\theta-\tan^2\theta=1$.

15. $5\tan\theta=4$ হইলে $\dfrac{6\sin\theta-3\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

16. $\tan\theta=\dfrac{p}{q}$ হইলে $\dfrac{p\sin\theta-q\cos\theta}{p\sin\theta+q\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

17. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$ রাশিটিকে $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

18. $x=a\sec\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ হইলে দেখাও যে $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

19. $\sin\theta+\cos\theta=p$ এবং $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=q$ হইলে দেখাও যে $q(p^2-1)=2p$.

20. $\tan\theta+\sin\theta=m$ এবং $\tan\theta-\sin\theta=n$ হইলে দেখাও যে $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

21. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হইলে দেখাও যে $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

তৃতীয় অধ্যায়

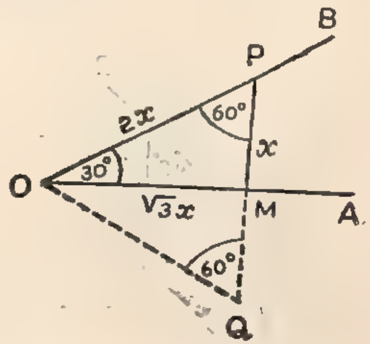
কয়েকটি কোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of certain angles)

$30°$, $45°$, $60°$-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে জ্যামিতিক উপায়ে নির্ণয় করা যায়। নিম্নে ঐ সকল কোণানুপাতগুলির নির্ণয় প্রণালী দেওয়া হইল।

$30°$-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOB=30°$; উহার $\overline{OB}$ বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু P লওয়া হইল যাহাতে $OP=2x$ হয়। এখন P-বিন্দু হইতে $\overline{OA}$ বাহুর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। অতএব $\angle OPM=60°$।

এখন $\overline{PM}$-কে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন PM=MQ হয়। $\overline{OQ}$ অঙ্কন করা হইল। এক্ষেত্রে △POM এবং △QOM সর্বসম।



$\therefore \angle OQM = 60°.$

∴ OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore OP = PQ.$

বা, $2x = 2.PM$

বা, $PM = x.$

এখন, △OPM-এর ক্ষেত্রে,

$PM^2 + OM^2 = OP^2.$

বা, $x^2 + OM^2 = (2x)^2$

বা, $OM^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

$\therefore \quad OM = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}.x$

$$\therefore \quad \sin 30° = \frac{PM}{OP} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30° = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}.x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PM}{OM} = \frac{x}{\sqrt{3}.x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

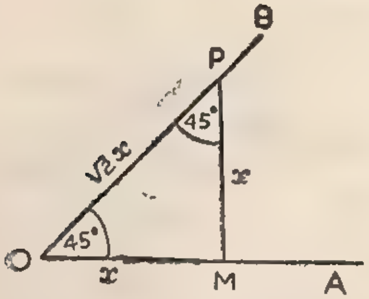
$$\cot 30° = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}.x}{x} = \sqrt{3}.$$

$$\sec 30° = \frac{OP}{OM} = \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{OP}{PM} = \frac{2x}{x} = 2.$$

45°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত: মনে কর, ∠AOB=45°, উহার $\overline{OA}$ বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু M লওয়া হইল যাহাতে $OM = x$ হয়। এখন $\overline{OA}$ বাহুর M বিন্দুতে উহার উপর লম্ব অঙ্কন করা হইল। উক্ত লম্ব রেখাটি $\overline{OB}$ বাহুকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে সমকোণী ত্রিভুজ POM-এর ∠OPM=45° হইবে।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POM-এর $\angle POM = \angle OPM = 45^\circ$.



$\therefore \quad PM = OM = x.$

আবার, $OP^2 = OM^2 + PM^2.$

বা, $OP^2 = x^2 + x^2 = 2x^2.$

$\therefore \quad OP = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x.$

$$\therefore \quad \sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{x}{\sqrt{2}.x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{\sqrt{2}.x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\tan 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{x}{x} = 1.$$

$$\cot 45^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{x} = 1.$$

$$\sec 45^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}.$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}.$$

60°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOB = 60^\circ$; উহার $\overline{OB}$ বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু P লওয়া হইল যেন $OP = 2x$ হয় এখন P বিন্দু হইতে $\overline{OA}$ বাহুর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। $\overline{MA}$ হইতে $\overline{OM}$-এর সমান করিয়া $\overline{MQ}$ কাটিয়া লওয়া হইল। $\overline{PQ}$ অঙ্কন করা হইল।

$\therefore$ ΔPOM এবং ΔPQM সর্বসম।

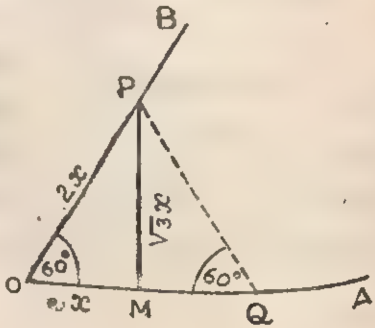
$\therefore$ $\angle PQM = \angle POM = 60^\circ.$

$\therefore$ POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore OP = PQ$

বা, $2x = 2.OM$ [$\because$ $OM = MQ$ (অঙ্কন)].

$\therefore$ $OM = x.$



এখন, OPM সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$PM^2+OM^2=OP^2$$

বা, $PM^2+x^2=(2x)^2$

বা, $PM^2=4x^2-x^2=3x^2$

বা, $PM=\sqrt{3x^2}=\sqrt{3}x$

$\therefore \quad PM=\sqrt{3}x.$

$$\sin 60^\circ=\frac{PM}{OP}=\frac{\sqrt{3}x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 60^\circ=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ=\frac{PM}{OM}=\frac{\sqrt{3}x}{x}=\sqrt{3}.$$

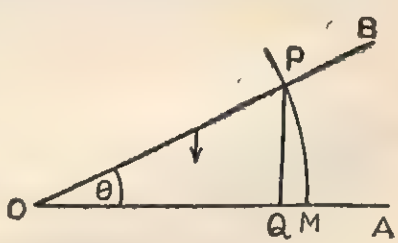
$$\cot 60^\circ=\frac{OM}{PM}=\frac{x}{\sqrt{3}x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sec 60^\circ=\frac{OP}{OM}=\frac{2x}{x}=2.$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{OP}{PM}=\frac{2x}{\sqrt{3}x}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

0°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOB$ একটি অতিক্ষুদ্র সূক্ষ্মকোণ এবং উহার পরিমাপ$=\theta$.

$\overline{OB}$ বাহুর উপর O বিন্দু ভিন্ন এরূপ একটি বিন্দু P লওয়া হইল যাহাতে $OP=x$ হয়। O-কে কেন্দ্র করিয়া x-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করাতে উহা $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ বাহুকে যথাক্রমে M এবং P বিন্দুতে ছেদ করিল। P-বিন্দু হইতে $\overline{OA}$ বাহুর উপর PQ লম্ব টানা হইল।



এখন θ-এর মান যতই কমিতে থাকিবে $\overline{OB}$ বাহু ততই $\overline{OA}$ বাহুর নিকটবর্তী হইবে। ইহার ফলে PQ-এর দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকিবে। এরূপে যখন θ-এর মান শূন্য হইবে তখন PQ=O এবং P ও Q বিন্দু M বিন্দুর উপর সমপতিত হইবে।

$\therefore$ $\theta \to 0^\circ$ হইলে $PQ \to 0$ এবং $OQ \to OP$ $(\because OM = OP)$.

এখন, $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ $\therefore$ $\sin 0^\circ = \frac{0}{x} = 0$ $[\because OP = x]$

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$ $\therefore$ $\cos 0^\circ = \frac{x}{x} = 1$

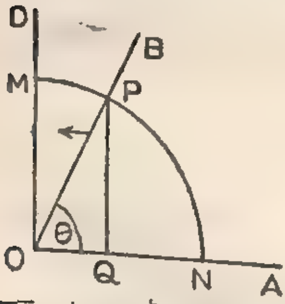
$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$ $\therefore$ $\tan 0^\circ = \frac{0}{x} = 0$

$\sec\theta = \frac{OP}{OQ}$ $\therefore$ $\sec 0^\circ = \frac{x}{x} = 1$

দ্রষ্টব্য : এখানে $\cot 0^\circ = \frac{x}{0}$ এবং $\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{x}{0}$ হইবে। এখন মনে কর a এরূপ একটি সংখ্যা যাহা $\frac{x}{0}$-এর ভাগফল। অতএব $\frac{x}{0} = a$ বা, $x = 0 \times a = 0$; কিন্তু ইহা অসম্ভব। অর্থাৎ x-কে 0-দ্বারা ভাগ করিলে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না। অতএব $\cot 0^\circ$ এবং $\operatorname{cosec} 0^\circ$-এর মান অনির্দিষ্ট।

90°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত : মনে কর, $\angle AOD$ সমকোণ এবং সূক্ষ্মকোণ AOB-এর পরিমাপ $= \theta$.

$\overline{OB}$ বাহুর উপর O বিন্দু ভিন্ন এরূপ একটি বিন্দু P লওয়া হইল যাহাতে দৈর্ঘ্য OP $= x$ হয়। O-কে কেন্দ্র করিয়া x-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হইল। ঐ বৃত্তচাপটি $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ এবং $\overline{OD}$-কে যথাক্রমে N, P এবং M বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দু হইতে $\overline{OA}$-এর উপর $\overline{PQ}$ লম্ব টানা হইল।



এখন θ-এর মান যতই 90° নিকটবর্তী হইবে $\overline{OB}$ বাহু ততই $\overline{OD}$-এর দিকে অগ্রসর হইবে। ইহার ফলে $\overline{OQ}$-এর মান ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকিবে। এইরূপে যখন $\theta = 90^\circ$ হইবে তখন $OQ = 0$ হইবে। ঐ অবস্থায় P এবং Q বিন্দু যথাক্রমে M এবং O-বিন্দুর উপর সমপতিত হইবে।

$\theta \to 90^\circ$ হইলে $OQ \to 0$ এবং $PQ \to OP$ $(\because OP = OM)$

এখন, $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ $\therefore$ $\sin 90^\circ = \frac{x}{x} = 1$ $(\because OP = x)$

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$ $\therefore$ $\cos 90^\circ = \frac{0}{x} = 0$

$$\cot\theta=\frac{OQ}{PQ} \qquad \therefore \quad \cot 90^\circ=\frac{0}{x}=0$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PQ} \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec} 90^\circ=\frac{x}{x}=1.$$

দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে $\tan 90^\circ=\frac{x}{0}$ এবং $\sec 90^\circ=\frac{x}{0}$ বলিয়া $\tan 90^\circ$ এবং $\sec 90^\circ$-এর মান অনির্দিষ্ট।

ত্রিকোণমিতিতে 0°, 30°, 45°, 60°, 90°-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলি বিশেষভাবে ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এইজন্য উহাদের মানগুলিকে তালিকা আকারে দেখান হইল।

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অনির্দিষ্ট
cot	অনির্দিষ্ট	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অনির্দিষ্ট
cosec	অনির্দিষ্ট	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

উপরের তালিকাটিতে লক্ষ্য কর যে, $\theta=30^\circ$ হইলে

(i) $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ বা, $\sin 30^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)$

(ii) $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$ বা, $\cos 30^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)$

(iii) $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60^\circ$ বা, $\tan 30^\circ=\cot(90^\circ-30^\circ)$;

এখন θ যে-কোন ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে কি

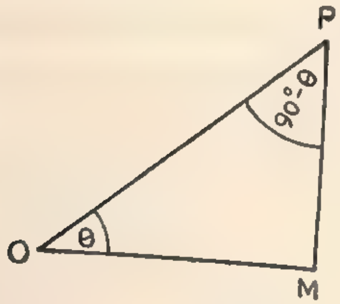
$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$, $\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$,

$\tan\theta=\cot(90^\circ-\theta)$ হইবে ?

পূরক কোণের অনুপাত: দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হইলে উহাদের পূরক কোণ (Complementary Angles) বলে। কোণ দুইটির একটিকে অপরটির পূরক (Complement) বলা হয়। পূরক কোণ দুইটির একটির পরিমাপ θ হইলে অপরটির পরিমাপ $(90^\circ - \theta)$ হইবে।

মনে কর, $\triangle$POM-এর $\angle$PMO সমকোণ এবং $\angle$POM-এর পরিমাপ$=\theta$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে,



$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} \quad \cdots \quad (3)$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} \quad \cdots \quad (4)$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} \quad \cdots \quad (5)$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} \quad \cdots \quad (6)$$

এখন $\triangle$POM-এর $\angle$OPM এবং $\angle$POM পরস্পর পূরক কোণ।

$\therefore$ $\angle$OPM-এর পরিমাপ$+\angle$POM-এর পরিমাপ$=90^\circ$

বা, $\angle$OPM-এর পরিমাপ$+\theta=90^\circ$

$\therefore$ $\angle$OPM-এর পরিমাপ$=90^\circ-\theta$

এখন $\triangle$POM-এর $\angle$PMO সমকোণ এবং $\angle$OPM-এর পরিমাপ$=(90^\circ-\theta)$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে,

$$\therefore \sin(90^\circ-\theta) = \frac{OM}{OP} \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$

$$\cos(90^\circ-\theta) = \frac{PM}{OP} \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

$$\tan(90^\circ-\theta) = \frac{OM}{PM} \quad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

$$\cot(90°-\theta)=\frac{PM}{OM} \quad \cdots \quad \cdots \quad (10)$$

$$\sec(90°-\theta)=\frac{OP}{PM} \quad \cdots \quad \cdots \quad (11)$$

$$\operatorname{cosec}(90°-\theta)=\frac{OP}{OM} \quad \cdots \quad \cdots \quad (12)$$

$\therefore \quad \sin(90°-\theta)=\cos\theta$ [(7) এবং (2) হইতে]

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ [(8) " (1) "]

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$ [(9) " (4) "]

$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$ [(10) " (3) "]

$\sec(90°-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ [(11) " (6) "]

$\operatorname{cosec}(90°-\theta)=\sec\theta$ [(12) " (5) "]

উদা. 1. দেখাও যে, $\cos(90°-\theta)\sin(90°-\theta)\operatorname{cosec}\theta=\cos^2\theta$

উঃ $\cos\theta\cos(90°-\theta)\sin(90°-\theta)\operatorname{cosec}\theta$

$=\cos\theta.\ \sin\theta.\ \cos\theta.\ \frac{1}{\sin\theta}=\cos^2\theta.$

উদা. 2. দেখাও যে, $\operatorname{cosec}18°\cos72°+\tan54°\cos36°$
$=1+\operatorname{cosec}36°$

উঃ এখানে $\cos72°=\sin(90°-72°)=\sin18°$ এবং

$\tan54°=\cot(90°-54°)=\cot36°.$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}18°\cos72°+\tan54°\sec36°$

$=\frac{1}{\sin18°}.\sin18°+\cot36°\sec36°$

$=1+\frac{\cos36°}{\sin36°}.\ \frac{1}{\cos36°}=1+\frac{1}{\sin36°}=1+\operatorname{cosec}36°$

উদা. 3. $3\tan^2 45°+\sin^2 60°-2\cot^2 30°-\frac{3}{8}\sec^4 45°$-এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $3\tan^2 45°+\sin^2 60°-2\cot^2 30°-\frac{3}{8}\sec^4 45$

$=3(1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2(\sqrt{3})^2-\frac{3}{8}(\sqrt{2})^4$

$=3+\frac{3}{4}-6-\frac{3}{8}(4)=3+\frac{3}{4}-6-\frac{3}{2}$

$=\frac{12+3-24-6}{4}=-3\frac{3}{4}.$

উদা. 4. $\dfrac{\cot 60^\circ \cot 30^\circ+1}{\cot 30^\circ-\cot 60^\circ}+\sin^2 30^\circ \tan^2 30^\circ-\cos 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ$ -এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $\dfrac{\cot 60^\circ \cot 30^\circ+1}{\cot 30^\circ-\cot 60^\circ}+\sin^2 30^\circ \tan^2 30^\circ-\cos 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$$

$$=\frac{2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{1}{12}-\sqrt{3}=\frac{1}{12}.$$

প্রশ্নমালা 4

দেখাও যে—

1. $\tan(90^\circ-\theta)\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)\cos\theta=\cot\theta$
2. $\cot(90^\circ-\theta)\sec(90^\circ-\theta)\cos(90^\circ-\theta)=\tan\theta$
3. (i) $\sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ=1$
   (ii) $\sin 50^\circ \cos 40^\circ+\cos 50^\circ \sin 40^\circ=1$
4. (i) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ=\sin 60^\circ$
   (ii) $\operatorname{cosec} 25^\circ.\cos 65^\circ+\cos 15^\circ \operatorname{cosec} 75^\circ=2.$
5. $\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ=\cos 60^\circ$
6. $1+\cot^2 60^\circ=\operatorname{cosec}^2 60^\circ$
7. $(1+\tan 45^\circ)(1-\tan 45^\circ)=0$
8. $\sin 60^\circ \sin 30^\circ-\cos 60^\circ \cos 30^\circ=0$
9. $(1+\tan 30^\circ \tan 60^\circ)\tan 30^\circ=\tan 60^\circ-\cot 60^\circ$
10. $(\sin 30^\circ+\cos 60^\circ)(\sec 45^\circ+\operatorname{cosec} 45^\circ)=2\sqrt{2}.$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

11. $(\sin 60^\circ+\sin 30^\circ)(\cos 60^\circ-\cos 30^\circ)$
12. $\cos^2 45^\circ+2\sin 60^\circ \cos 30^\circ+6\sin 30^\circ$
13. $\sin^2 60^\circ-\sin^4 30^\circ-\cos^4 30^\circ+\cos^2 60^\circ$

14. $\cot^2 30° - 2\cos^2 60° - \frac{3}{4}\sec^2 45° - 4\sin^2 30°$

15. $3\tan^2 45° - \sin^2 60° - \frac{1}{2}\cot^2 30° + \frac{1}{8}\sec^2 45°$

16. $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1+\tan 60° \tan 30°} - \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$

17. $\frac{2\tan^2 30°}{1-\tan^2 30°} + \operatorname{cosec}^2 45° - 3\cot^2 45° - (\sin^2 30° + \sin^2 60°)$

18. দেখাও যে $\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = \sec 60° + \tan 60°$

19. দেখাও যে $\frac{1+\tan 30°}{1-\tan 30°} - \frac{1+\sin 60°}{\sin 30°} = 0$

20. দেখাও যে, $\frac{1+2\sin 60° \cos 60°}{\sin 60° + \cos 60°} + \frac{1-2\sin 60° \cos 60°}{\sin 60° - \cos 60°}$

$$= 2\cos 30°$$

21. দেখাও যে $\frac{1-\sin^2 30°}{1+\sin^2 45°} \times \frac{\cos^2 60° + \cos^2 30°}{\operatorname{cosec} 90° - \cot^2 99°}$

$$\times \frac{1}{\sin 60° \tan 30°} = 1.$$

ত্রিকোণমিতিক সমাধান :

উদা. $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$ ধরিয়া নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :—

(i) $\sin 2\theta = \cos\theta$

(ii) $\sin^2\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{2} = 0$

(iii) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

(iv) $\tan\theta + \cot\theta = 2.$

উঃ (i) $\sin 2\theta = \cos\theta$

বা, $\sin 2\theta = \sin(90° - \theta)$ $\quad [\because \sin(90° - \theta) = \cos\theta]$

$\therefore 2\theta = 90° - \theta$ $\quad$ বা, $3\theta = 90°$ $\quad \therefore \theta = 30°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 30°$

(i) $\sin^2\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{2} = 0$

বা, $\sin^2\theta - (1-\sin^2\theta) + \frac{1}{2} = 0$ $\quad$ বা, $\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta + \frac{1}{2} = 0$

বা, $2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ $\quad$ বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $(\sin\theta)^2-(\frac{1}{2})^2=0$ বা $(\sin\theta-\frac{1}{2})(\sin\theta+\frac{1}{2})=0$ ... (a)

$\therefore$ $\sin\theta-\frac{1}{2}=0$ এবং $\sin\theta+\frac{1}{2}=0$ সমীকরণ দুইটির সমাধানই (a) নং সমীকরণটির সমাধান হইবে।

এখন $\sin\theta-\frac{1}{2}=0$ বা, $\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$ $\therefore$ $\theta=30^\circ$

আবার $\sin\theta+\frac{1}{2}=0$ বা, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$; কিন্তু θ-ধণাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin\theta$-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=30^\circ$.

(iii) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=3$

বা, $2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$

বা, $2-2\cos^2\theta+3\cos\theta-3=0$

বা, $-2\cos^2\theta+3\cos\theta-1=0$ বা, $2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos^2\theta-2\cos\theta-\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta-1)-1(\cos\theta-1)=0$

বা, $(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$ ... ... (a)

$\therefore$ $\cos\theta-1=0$ এবং $2\cos\theta-1=0$ সমীকরণ দুইটির সমাধানই (a) নং সমীকরণটির সমাধান।

এখন $\cos\theta-1=0$ বা, $\cos\theta=1=\cos 0^\circ$ $\therefore$ $\theta=0^\circ$

আবার $2\cos\theta-1=0$ বা, $2\cos\theta=1$

$\therefore$ $\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ $\therefore$ $\theta=60^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta=0^\circ$ এবং $\theta=60^\circ$

(iv) $\tan\theta+\cot\theta=2$

বা, $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$ বা, $\dfrac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}=2$

বা, $\tan^2\theta+1=2\tan\theta$ বা, $\tan^2\theta-2\tan\theta+1=0$

বা, $(\tan\theta-1)^2=0$ $\therefore$ $\tan\theta-1=0$

বা, $\tan\theta=1=\tan 45^\circ$ $\therefore$ $\theta=45^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta=45^\circ$

প্রশ্নমালা 5

$0^\circ\leqslant\theta\leqslant90^\circ$ ধরিয়া নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :—

1. $\tan 2\theta=\cot\theta$
2. $2\sin\theta-1=0$
3. $\sin\theta=\cos\theta$
4. $\cos\theta=\cot\theta$

5. $2\sin\theta\cos\theta = 2\sin^2\theta$ 6. $2\cos^2\theta - 3\sin\theta = 0$

7. $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$ 8. $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

9. $2\tan^2\theta + 3\sec\theta = 0$ 10. $\operatorname{cosec}\theta . \cot\theta = 2\sqrt{3}$

11. $\tan^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta - 1$ 12. $\cot^2\theta + \tan^2\theta = 2$

13. $r\cos\theta = 2\sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta = 2$ হইলে r এবং θ-এর মান নির্ণয় কর।

14. $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$ হইলে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

15. $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ হইলে দেখাও যে $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

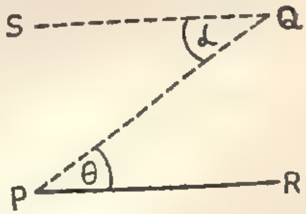
চতুর্থ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব

(Height and Distance)

ত্রিকোণমিতির কোণানুপাতের সাহায্যে বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করা যায়। এই অধ্যায়ে কেবলমাত্র উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সহজ প্রশ্নাবলী আলোচনা করা হইবে।

উন্নতি কোণ (Angle of elevation) এবং **অবনতি কোণ** (Angle of depression) : মনে কর, P এবং Q বিন্দু দুইটি একই উল্লম্বতলে (Vertical plane) অবস্থিত। P এবং Q বিন্দু হইতে উক্ত তলে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাংশ দুইটি যথাক্রমে $\overline{PR}$ এবং $\overline{QS}$.



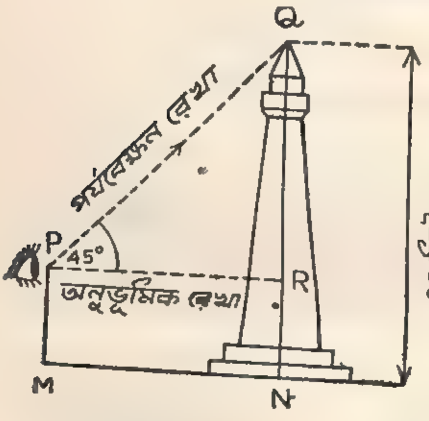
চিত্রানুসারে, Q-বিন্দু অনুভূমিক রেখাংশ $\overline{QP}$-এর ঊর্ধ্বে এবং P-বিন্দু অনুভূমিক রেখাংশ $\overline{QS}$-এর নিম্নে অবস্থিত। এক্ষেত্রে $\angle QPR$-কে P বিন্দু হইতে Q বিন্দুর **উন্নতি কোণ** (Angle of elevation) বলে। অপরপক্ষে, $\angle PQS$-কে Q বিন্দু হইতে P বিন্দুর **অবনতি কোণ** (Angle of depression) বলা হয়। চিত্রে, $\angle QPR$-এর পরিমাপকে θ দ্বারা এবং $\angle PQS$-এর পরিমাপকে α (আল্‌ফা) দ্বারা দেখান হইয়াছে।

$\angle QPR$-এর সাপেক্ষে Q বিন্দুকে পর্যবেক্ষণ বিন্দু, P বিন্দুকে পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থান-বিন্দু (বা সংক্ষেপে, পর্যবেক্ষকের অবস্থান) এবং $\overline{PQ}$ রেখাংশকে পর্যবেক্ষণ বিন্দু রেখা (Line of sight) ধরা হয়। আবার $\angle PQS$-এর ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষণ বিন্দু P, পর্যবেক্ষকের অবস্থান Q এবং পর্যবেক্ষণ রেখা $\overline{QP}$.

লক্ষ্য কর যে, উন্নতিকোণের ক্ষেত্রে, পর্যবেক্ষকের অবস্থান পর্যবেক্ষণ বিন্দুর নিম্নে এবং অবনতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের অবস্থান পর্যবেক্ষণ বিন্দুর উর্ধে আছে। নিম্নের উদারণগুলি দেখ।

উদাহরণ : এক ব্যক্তি 5 মিটার উচ্চ কোন স্থান হইতে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° দেখিতে পাইলেন। যদি স্তম্ভটির উচ্চতা 20 মিটার হয়, তবে স্তম্ভটি হইতে ঐ ব্যক্তির দূরত্ব কত ?

উঃ মনে কর, P-বিন্দু পর্যবেক্ষকের অবস্থান, Q-বিন্দু স্তম্ভটির শীর্ষবিন্দু (বা পর্যবেক্ষণ বিন্দু), QN স্তম্ভটির উচ্চতা এবং PM ভূমি হইতে পর্যবেক্ষকের দূরত্ব।



এখানে P বিন্দু হইতে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাংশ PR, QN-কে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ স্তম্ভটি হইতে পর্যবেক্ষকের দূরত্ব $= PR$.

শর্তানুসারে,

$QN = 20$ মিটার, $PM = 5$ মিটার এবং উন্নতি কোণ $= \angle QPR = 45^\circ$

এখন PMNR একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $RN = PM = 5$ মিটার এবং $\angle QRP = \angle RNM = 90^\circ$

$\therefore$ $\triangle PQR$-এর $\angle QRP$ সমকোণ এবং $\angle QPR = 45^\circ$;

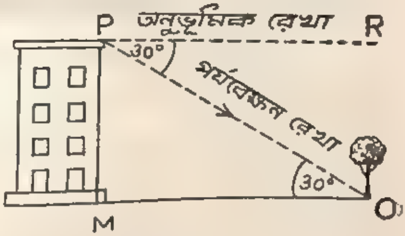
$\therefore$ $\frac{QR}{PR} = \tan 45^\circ$ বা, $\frac{QR}{PR} = 1$

$\therefore$ $PR = QR = QN - RN = 20$ মিটার $- 5$ মিটার $= 15$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 15$ মিটার।

উদাহরণ : নদীর তীরে 50 ফুট উচ্চ একটি লাইট হাউসের শীর্ষ হইতে নদীর অপর তীরবর্তী একটি গাছের পাদদেশের অবনতি কোণ 30° হইলে লাইট হাউস হইতে গাছটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, P-বিন্দু পর্যবেক্ষকের অবস্থান, O-বিন্দু পর্যবেক্ষণ বিন্দু এবং PM লাইট হাউসের উচ্চতা। এখানে লাইট হাউসের পাদদেশ হইতে গাছটির দূরত্ব $= OM$



এখন P বিন্দু হইতে অনুভূমিক রেখাংশ PR অঙ্কন করা হইল। $\therefore$ P বিন্দু হইতে O বিন্দুর অবনতি কোণ $= \angle OPR = 30^\circ$

আবার $\overline{PR} \parallel \overline{OM}$ এবং $\overline{PO}$ ছেদক ;

অতএব $\angle POM = \angle OPR = 30^\circ$.

এখন $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ এবং $\angle POM = 30^\circ$;

$$\therefore \quad \frac{PM}{OM} = \tan 30^\circ \quad \text{বা,} \quad \frac{PM}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বা, $OM = \sqrt{3}.\ PM$

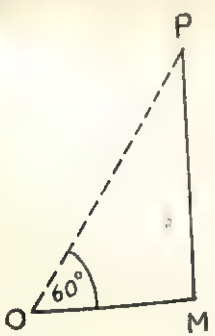
$= \sqrt{3} \times 50$ ফুট ($\because$ PM = লাইট হাউসের উচ্চতা = 50 ফুট)

$= 1.732 \times 50$ ফুট $= 86.6$ ফুট

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 86.6$ ফুট।

বিবিধ উদাহরণ :

উদা 1. একটি চিমনির পাদদেশ হইতে 100 মিটার দূরে কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 60° ; চিমনিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



উঃ মনে কর, P বিন্দু চিমনির শীর্ষবিন্দু, PM চিমনির উচ্চতা এবং M বিন্দু হইতে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখার উপরিস্থিত O বিন্দুতে চিমনির শীর্ষের উন্নতিকোণ $= \angle POM = 60^\circ$.

এখানে $\overline{PM} \perp \overline{OM}$ এবং $OM = 100$ মিটার।

$$\therefore \quad \frac{PM}{OM} = \tan 60^\circ \quad \text{বা,} \quad \frac{PM}{OM} = \sqrt{3}$$

বা, $PM = \sqrt{3}\ OM$

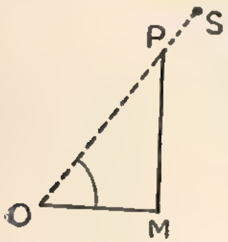
$= \sqrt{3} \times 100$ মিটার

$= 1.732 \times 100$ মিটার $= 173.2$ মিটার।

∴ চিমনির নির্ণেয় উচ্চতা $= 173.2$ মিটার।

উদা. 2. 12 মিটার উচ্চ একটি দণ্ডের ছায়ার দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ মিটার হইলে, সূর্যের উন্নতিকোণ কত হইবে?

উঃ মনে কর, P দণ্ডের শীর্ষবিন্দু, S সূর্যের অবস্থান এবং PM দণ্ডের উচ্চতা।



এখানে সূর্য রশ্মি $\overline{SP}$ বরাবর ভূমির উপর O বিন্দুতে আপতিত হইবার ফলে $\overline{OM}$, $\overline{PM}$ দণ্ডটির ছায়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে সূর্যের উন্নতিকোণ $= \angle SOM$.

শর্তানুসারে,

$PM = 12$ মিটার, $OM = 4\sqrt{3}$ এবং $\overline{PM} \perp \overline{OM}$.

$$\therefore \tan \angle POM = \frac{PM}{OM} = \frac{12 \text{ মি.}}{4\sqrt{3} \text{ মি.}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

কিন্তু $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$; ∴ $\tan \angle POM = \tan 60^\circ$

∴ $\angle POM = 60^\circ$

আবার $\angle SOM = \angle POM$; ∴ $\angle SOM = 60^\circ$

∴ সূর্যের উন্নতিকোণ $= 60^\circ$

উদা. 3. ঝড়ে একটি উলম্বদণ্ড উপরের কোন একস্থানে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার উপরের অংশটি মূল দণ্ডটি হইতে বিচ্ছিন্ন না হইয়া দণ্ডটির পাদদেশ হইতে 50 মিটার দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিয়া ভূমির সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিল। দণ্ডটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

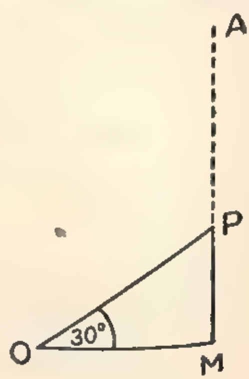
উঃ মনে কর, AM দণ্ডটির উচ্চতা। দণ্ডটি P বিন্দুতে ভাঙ্গিবার ফলে উহার শীর্ষবিন্দু A ভূমিকে O বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। অর্থাৎ $\overline{OP}$, $\overline{AP}$-এর নূতন অবস্থা।

∴ $OP = AP$

এখন $AM = AP + PM$ বা, $AM = OP + PM$ ... (i)

শর্তানুসারে,

$\angle POM = 30^\circ$ এবং $OM = 50$ মিটার।



এখন $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ এবং

$\angle POM = 30^\circ$;

$\therefore \quad \frac{PM}{OM} = \tan 30^\circ$

বা, $\frac{PM}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $PM = \frac{OM}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad PM = \frac{50}{\sqrt{3}} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

আবার $\frac{OP}{OM} = \sec 30^\circ$ বা, $\frac{OP}{OM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $OP = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot OM = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 50$ মিটার

$\therefore \quad OP = \frac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার $\quad \cdots \quad$ (iii)

এখন (i) হইতে, $AM = OP + PM$

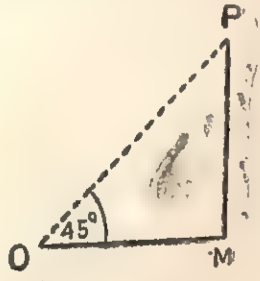
$= \frac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার $+ \frac{50}{\sqrt{3}}$ মিটার

$= \frac{150}{\sqrt{3}}$ মিটার $= 50\sqrt{3}$ মিটার

$\therefore$ স্তম্ভটির উচ্চতা $= 50\sqrt{3}$ মিটার।

উদা. 4. একটি বিমান ভূমি হইতে নির্দিষ্ট বেগে অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণ করিয়া উড়িয়া চলিল। উড়িবার 4 সেকেণ্ড পরে উহা ভূমি হইতে 1120 ফুট উচ্চে উঠিল। ঐ সময়ে বিমানটির দ্বারা অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব এবং প্রতি সেকেণ্ডে বিমানটির বেগ নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, বিমানটি O বিন্দু হইতে উড়িয়া 4 সেকেণ্ড পরে P বিন্দুতে পৌছিয়াছে। P বিন্দু হইতে ভূমির দূরত্ব PM এবং বিমান কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব OM.



শর্তানুসারে,

$\angle POM = 45^\circ$ এবং $PM = 1120$ ফুট।

এখন $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ এবং

$\angle POM = 45^\circ$.

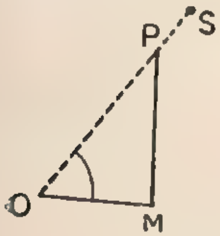
$= \sqrt{3} \times 100$ মিটার

$= 1.732 \times 100$ মিটার $= 173.2$ মিটার।

$\therefore$ চিমনির নির্ণেয় উচ্চতা $= 173.2$ মিটার।

উদা. 2. 12 মিটার উচ্চ একটি দণ্ডের ছায়ার দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ মিটার হইলে, সূর্যের উন্নতিকোণ কত হইবে ?

উঃ মনে কর, P দণ্ডের শীর্ষবিন্দু, S সূর্যের অবস্থান এবং PM দণ্ডের উচ্চতা।



এখানে সূর্য রশ্মি $\overline{SP}$ বরাবর ভূমির উপর O বিন্দুতে আপতিত হইবার ফলে $\overline{OM}$, $\overline{PM}$ দণ্ডটির ছায়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে সূর্যের উন্নতিকোণ $= \angle SOM$.

শর্তানুসারে,

$PM = 12$ মিটার, $OM = 4\sqrt{3}$ এবং $\overline{PM} \perp \overline{OM}$.

$\therefore \tan \angle POM = \frac{PM}{OM} = \frac{12 \text{ মি.}}{4\sqrt{3} \text{ মি.}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

কিন্তু $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$; $\therefore \tan \angle POM = \tan 60^\circ$

$\therefore \angle POM = 60^\circ$

আবার $\angle SOM = \angle POM$; $\therefore \angle SOM = 60^\circ$

$\therefore$ সূর্যের উন্নতিকোণ $= 60^\circ$

উদা. 3. ঝড়ে একটি উল্লম্বদণ্ড উপরের কোন একস্থানে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার উপরের অংশটি মূল দণ্ডটি হইতে বিচ্ছিন্ন না হইয়া দণ্ডটির পাদদেশ হইতে 50 মিটার দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিয়া ভূমির সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিল। দণ্ডটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

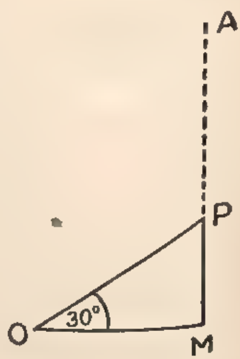
উঃ মনে কর, AM দণ্ডটির উচ্চতা। দণ্ডটি P বিন্দুতে ভাঙ্গিবার ফলে উহার শীর্ষবিন্দু A ভূমিকে O বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। অর্থাৎ $\overline{OP}$, $\overline{AP}$-এর নূতন অবস্থা।

$\therefore OP = AP$

এখন $AM = AP + PM$ বা, $AM = OP + PM$ ... (i)

শর্তানুসারে,

$\angle POM = 30^\circ$ এবং $OM = 50$ মিটার।



এখন $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ এবং

$\angle POM = 30^\circ$;

$$\therefore \quad \frac{PM}{OM} = \tan 30^\circ$$

বা, $\dfrac{PM}{OM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $PM = \dfrac{OM}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad PM = \frac{50}{\sqrt{3}} \qquad \cdots \qquad (ii)$$

আবার $\dfrac{OP}{OM} = \sec 30^\circ$ বা, $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $OP = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot OM = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times 50$ মিটার

$$\therefore \quad OP = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ মিটার} \qquad \cdots \qquad (iii)$$

এখন (i) হইতে, $AM = OP + PM$

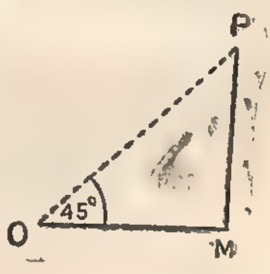
$= \dfrac{100}{\sqrt{3}}$ মিটার $+ \dfrac{50}{\sqrt{3}}$ মিটার

$= \dfrac{150}{\sqrt{3}}$ মিটার $= 50\sqrt{3}$ মিটার

$\therefore$ দণ্ডটির উচ্চতা $= 50\sqrt{3}$ মিটার।

উদা. 4. একটি বিমান ভূমি হইতে নির্দিষ্ট বেগে অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণ করিয়া উড়িয়া চলিল। উড়িবার 4 সেকেণ্ড পরে উহা ভূমি হইতে 1120 ফুট উচ্চে উঠিল। ঐ সময়ে বিমানটির দ্বারা অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব এবং প্রতি সেকেণ্ডে বিমানটির বেগ নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, বিমানটি O বিন্দু হইতে উড়িয়া 4 সেকেণ্ড পরে P বিন্দুতে পৌঁছিয়াছে। P বিন্দু হইতে ভূমির দূরত্ব PM এবং বিমান কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব OM.



শর্তানুসারে,

$\angle POM = 45^\circ$ এবং $PM = 1120$ ফুট।

এখন $\triangle POM$-এর $\angle PMO$ সমকোণ এবং

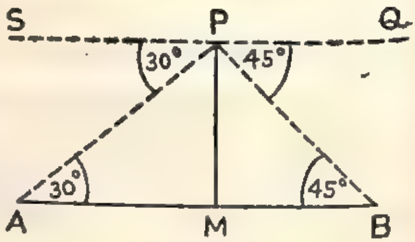
$\angle POM = 45^\circ$.

$\therefore$ $AB=(\sqrt{3}-1)PM=(\sqrt{3}-1)\ h$ মিটার [$\because$ $PM=h$ মিটার]
$=(1\cdot732-1)\ h$ মিটার $=0\cdot732h$ মিটার।

(b) মনে কর, A এবং B বিন্দুদ্বয় চূড়াটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। P বিন্দু দিয়া অনুভূমিক রেখাংশ SQ অঙ্কন করা হইল।

এখানে $\angle PAM=\angle APS=30^\circ$, $\angle PBM=\angle BPQ=45^\circ$

এবং $PM=h$ মিটার।



এখন $\dfrac{PM}{AM}=\tan 30^\circ$

বা, $\dfrac{PM}{AM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $AM=\sqrt{3}\ PM$ ... (iii)

আবার $\dfrac{PM}{BM}=\tan 45^\circ$

বা, $\dfrac{PM}{BM}=1$ বা, $BM=PM$ ... ... (iv)

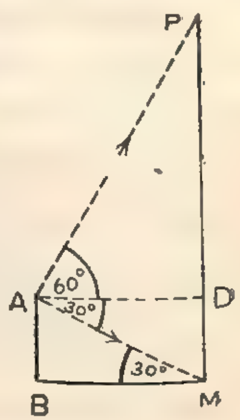
এখন $AB=AM+BM=\sqrt{3}PM+PM$ [(iii) এবং (iv) হইতে]

$\therefore$ $AB=(\sqrt{3}+1)PM=(\sqrt{3}+1)\ h$ মিটার
$=(1\cdot732+1)\ h$ মিটার $=2\cdot732\ h$ মিটার।

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=0\cdot732\ h$ মিটার অথবা $2\cdot732\ h$ মিটার।

উদা. 7. একটি বাড়ীর 75 মিটার দূরে কোন স্তম্ভের উপর হইতে বাড়ীটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং উহরে পাদদেশের অবনতি কোণ 30° দেখা গেল। বাড়ীটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

উঃ। মনে কর, বাড়ীটির উচ্চতা PM, স্তম্ভটির উচ্চতা AB এবং স্তম্ভ ও বাড়ীর পাদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব BM.



স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু A হইতে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখা PM-কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব, এক্ষেত্রে স্তম্ভের শীর্ষ A হইতে বাড়ীটির শীর্ষবিন্দু P-এর উন্নতি কোণ $=\angle PAD$ এবং বাড়ীটির পাদবিন্দু অবনতি কোণ $=\angle MAD$.

শর্তানুসারে, $\angle PAD=60^\circ$, $\angle MAD=30^\circ$

এবং $BM = 75$ মিটার।

এখন, $\overline{AD} \parallel \overline{BM}$ এবং $\overline{AM}$ ছেদক ;

$\therefore \quad \angle AMB = \angle MAD = 30^\circ$.

আবার, ABMD একটি আয়তক্ষেত্র ; $\therefore \quad DM = AB$ এবং $AD = BM$.

এখন, $\triangle PAD$-এর $\angle ADP$ সমকোণ এবং $\angle PAD = 60^\circ$;

$\therefore \quad \dfrac{PD}{AD} = \tan 60^\circ$ বা, $\dfrac{PD}{BM} = \sqrt{3}$ $\qquad (\because \quad AD = BM)$

বা, $PD = \sqrt{3}\, BM = 75\sqrt{3}$ মিটার $\qquad \cdots \qquad \cdots \quad$ (i)

আবার, $\triangle ABM$-এর $\angle ABM$ সমকোণ এবং $\angle AMB = 30^\circ$;

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BM} = \tan 30^\circ$ বা, $\dfrac{DM}{BM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $DM = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, BM = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times 75$ মিটার $= 25\sqrt{3}$ মিটার $\qquad \cdots \qquad \cdots \quad$ (ii)

এখন $PM = PD + DM = 75\sqrt{3}$ মিটার $+ 25\sqrt{3}$ মিটার

[(i) এবং (ii) হইতে]

$\therefore \quad PM = 100\sqrt{3}$ মিটার $= 100 \times 1{\cdot}732$ মিটার $= 173{\cdot}2$ মিটার।

$\therefore$ বাড়ীটির নির্ণেয় উচ্চতা $= 173{\cdot}2$ মিটার।

প্রশ্নমালা 6

[$\sqrt{2} = 1{\cdot}414$ এবং $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ ধরিবে।]

1. একটি স্তম্ভের অনুভূমিক তলের কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° ; স্তম্ভটির পাদদেশ হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব 20 মিটার হইলে স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

2. ভূমিতলের কোন একটি বিন্দুতে একটি লাইট পোষ্টের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° ; লাইট পোষ্টের উচ্চতা 24 মিটার হইলে উহার পাদদেশ হইতে উক্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

3. একটি মইকে ভূমির সহিত 30° কোণ করিয়া রাখিলে উহার উপরের প্রান্ত একটি দেওয়ালের শীর্ষে মিলিত হয়। যদি দেওয়ালটির উচ্চতা $7\frac{1}{2}$ মিটার হয়, তবে মইটির দৈর্ঘ্য কত ?

4. সূর্যের উন্নতি কোণ কত হইলে 9 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $9\sqrt{3}$ মিটার হইবে ?

5. 33 মিটার উচ্চ একটি লাইট হাউস হইতে উহার অনুভূমিক তলে অবস্থিত একটি নৌকার অবনতি কোণ 30° দেখা গেল। লাইট-হাউস হইতে নৌকার দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. দুইটি বাড়ীর মধ্যবর্তী দূরত্ব 150 মিটার; উহার একটির শীর্ষ হইতে অপরটির শীর্ষের অবনতি কোণ 60° হইলে উহাদের উচ্চতার পার্থক্য নির্ণয় কর।

7. একটি বিমান ভূমি হইতে ঘণ্টায় 180 কি. মি. বেগে অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণ করিয়া উড়িয়া চলল; 5 সেকেণ্ড পরে বিমানটি ভূমি হইতে কত উচ্চে উঠিবে ?

8. কোন নদীর তীরে অবস্থিত 25 মিটার উচ্চ একটি গম্বুজের শীর্ষ হইতে উহার ঠিক বিপরীত দিকে অপর তীরবর্তী একটি বস্তুর অবনতি কোণ 45°; নদীটির প্রস্থ এবং গম্বুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বস্তুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

9. একটি দেবদারু গাছ এরূপে ঝড়ে ভাঙ্গিয়া গেল যে উহার ভগ্ন অংশটি উহা হইতে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হইয়া উহার মূল হইতে $\sqrt{3}a$ মিটার দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিয়া 60° কোণ উৎপন্ন করিল। গাছটির উচ্চতা কত ছিল ?

10. কোন স্থান হইতে একটি মনুমেণ্টের অভিমুখে 40 মিটার অগ্রসর হওয়ার ফলে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° হইতে পরিবর্তিত হইয়া 60° হইল। মনুমেণ্টের উচ্চতা নির্ণয় কর।

11. একটি ঋজু রাস্তার উপরিস্থিত কোন বিমান হইতে উহার বিপরীত পার্শ্বস্থ পর পর দুইটি মাইল ফলকের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30° দেখা গেল। বিমানটি ভূমি হইতে কত উচ্চে ছিল ?

12. সূর্যের উন্নতি কোণ 30° হইতে 60°-তে পরিবর্তিত হইলে একটি গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য পূর্বাপেক্ষা 2 মিটার হ্রাস পাইল। গাছটির উচ্চতা কত ?

13. একটি চিমনির ভূমিতলের অনুভূমিক রেখার উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত P ও Q বিন্দু হইতে একজন পর্যবেক্ষক চিমনির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 60° দেখিতে পাইলেন। $PQ = 50$ মিটার হইলে চিমনটি হইতে P বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

14. একটি স্তম্ভের উচ্চতা 18 মিটার। উহার ভূমিতলের অনুভূমিক রেখার উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে একব্যক্তি স্তম্ভটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60° দেখিতে পাইলেন। পর্যবেক্ষকের অবস্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

15. কোন স্মৃতিস্তম্ভের ভূমিতলের অনুভূমিক রেখার উপর একই পার্শ্বস্থ দুইটি বিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$; যদি ঐ বস্তু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $12·8$ মিটার হয়, তবে স্মৃতি স্তম্ভের উচ্চতা কত?

16. 300 মিটার উচ্চ একটি পাহাড়ের শীর্ষ হইতে উহার ভূমিতলের অনুভূমিক রেখা বরাবর একটি ঋজু সেতুর দুইপ্রান্তের অবনতি কোণ যথাক্রমে $45°$ এবং $30°$ হইলে, সেতুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

17. একটি মিনারের চূড়া হইতে 20 মিটার নীচে নামিলে উহার অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন বস্তুর অবনতি কোণ $60°$ হইতে হ্রাস পাইয়া $45°$ হইল। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

18. দুইটি বাড়ীর উচ্চতা যথাক্রমে 180 ফুট এবং 60 ফুট। যদি দ্বিতীয়টির পাদদেশ হইতে প্রথমটির শীর্ষের উন্নতি কোণ $60°$ হয়, তবে প্রথমটির পাদদেশ হইতে দ্বিতীয়টির শীর্ষের উন্নতি কোণ এবং বাড়ী দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

19. 150 মিটার দীর্ঘ একটি সেতুর নিম্নস্থ জলতলের 2 মিটার উচ্চে কোন বিন্দুতে উহার দুই প্রান্তের উন্নতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$; জলতল হইতে সেতুটি কত উচ্চে অবস্থিত?

20. একটি স্তম্ভের পাদদেশ এবং চূড়া হইতে 18 মিটার দূরে অবস্থিত একটি মন্দিরের চূড়ার উন্নতি কোণ যথাক্রমে $45°$ এবং $30°$; স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

21. 40 মিটার উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদদেশ হইতে একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত একটি বৃক্ষের শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে $45°$ এবং $60°$; বৃক্ষটির উচ্চতা এবং বৃক্ষ হইতে স্তম্ভের দূরত্ব নির্ণয় কর।

22. h মিটার উচ্চ কোন দুর্গের শীর্ষ হইতে উহার ভূমিতলের অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত শত্রুপক্ষের দুইটি শিবিরের অবনতি কোণ α এবং β হইলে উভয় শিবিরের পারস্পরিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

23. ভূমি হইতে 25 মিটার উচ্চ কোন স্থান হইতে উহার অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন অফিস বাড়ীর শীর্ষের উন্নতি কোণ $60°$ এবং উহার পাদদেশের অবনতি কোণ $45°$; অফিস বাড়ীটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

24. একটি পাহাড়ের ভূমিতলের অনুভূমিক রেখার উপর উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত A এবং B বিন্দু হইতে পাহাড়টির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$; অনুভূমিক রেখা বরাবর পাহাড়ের পাদদেশের অভিমুখে আসিতেছে এরূপ

একজন পথিকের A হইতে B-তে পৌছাইতে 25 মিনিট সময় লাগিলে আর কত সময় পরে সে পাহাড়টির পাদদেশে পৌছিবে ?

25. জগন্নাথদেবের মন্দিরের পূর্বদিকে একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং ঐ বিন্দুটির উত্তর দিকে 100 মিটার দূরস্থিত অপর একটি বিন্দু হইতে চূড়াটির উন্নতি কোণ 30° ; মন্দিরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

পরিমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. 2166 বর্গ মিটার   2. হ্যাঁ   3. 750 ব.মি.   4. 6 মি.
5. 820 মি.   6. 80 ব.মি.   7. 270 ব.ফু.   8. 12 ফু.   9. $120\sqrt{2}$ ব.মি.
10. 6·928 মি. (প্রায়)   11. 18·61 মি.   13. 3468 ব.মি.   14. $6\frac{6}{7}$ মি.
15. 519·6 ব মি.   16. 30 ব মি ; 6·5 মি.   17. 560 ব.সে.মি,
18. 24 ব.গ., $4\frac{4}{5}$ গজ, 5 গজ   19. 69·71 মি. ; 627·36 ব.মি,
20. 1 মি ; 2 মি.   21. $3\frac{3}{7}$ ফু. এবং $4\frac{4}{7}$ ফু. অথবা $\frac{4}{7}$ ফু. এবং $\frac{16}{21}$ ফু.
22. 262·6 ব.ফু.   23. 46·69%   24. 12,727·27 ব.মি.   25. 10 ফু.
26. $6788\frac{4}{7}$ ব.মি.   27. 36 সে.মি.   28. 4750 ফুট   29. 1100 মি.
30. 98 ব.সে.মি.   31. $67\frac{1}{3}$ ব.মি.   32. A প্রতি ঘণ্টায় B অপেক্ষা $54\frac{106}{161}$ মি. বেশি যায়।

প্রশ্নমালা 2

1. 72 ব.মি. ; 36 ঘ.মি.   2. 13.5 ব.মি. ; 54 টাকা   3. 15 ফু.
4. 10 মি. ; 3·2 মি.   5. 18 ঘ.মি.   6. 15 ফু.   7. 7·6 মি ; 13·1632 মি.   8. 1071 ব.সে.মি.   9. 216 ব.ই.   10. 60 সে.মি.
11. 12000টি   12. 22·5 ঘণ্টা   13. $6115\frac{85}{96}$ গ্যালন   14. 15 সে.মি. ; 9 সে.মি., 6 সে.মি.   15. 12 মি.   16. 16 ফু. ; 12 ফু. ; 12 ফু.
17. 4320 ব সে.মি.   18. $\frac{143}{432}$ ঘ. ফু.   19. 9 ঘ. ফু. ; 99·44 টাকা (প্রায়)
20. 480 ঘ. সে.মি.   21. 1105   22. 16 ফু. ; 8 ফু.   23. 3 : 7
24. 12 সে.মি. ; 4 সে মি. ; 3 সে.মি.।

প্রশ্নমালা 3

1. $188\frac{4}{7}$ ব.সে.মি.   2. $2093\frac{1}{7}$ ব.সে.মি. ; 7128 ঘ.সে.মি.   3. $192\frac{1}{2}$ ঘ.ফু.
4. 15 সে.মি.   5. 8·8 মি.   6. 8 মি.   7. 3 : 2   9. 4032
10. $15639\frac{3}{11}$ গজ   11. $829\frac{5}{7}$ ঘ.সে.মি.   13. 5·68857 ব.ফু. ;

119'46 ঘ. ই. 14. 376'365 পা. 15. $339\frac{3}{7}$ পা. 16. $57\frac{1}{7}$%
17. $1\frac{267}{503}$ ফু. 18. $6\frac{282}{625}$ ইঞ্চি 19. 13 ঘণ্টা 39 মি. 12 সে. 20. 651'9 পা.
21. 33 পা.

প্রশ্নমালা 4

1. 38'5 ব.সে.মি., 22'4583 ঘ.সে.মি. 2. $\frac{1}{3}.1078\sqrt{2}$ ঘ.সে.মি.
3. 616 ব.সে.মি. 4. 1'2247 সে.মি. 5. $\frac{wy^3}{8x^3}$ 6. 6 সে.মি.
7. 150'85 ব.সে.মি. 8. 4 9. 70 10. 12 সে.মি. 11. 725'497 ঘ.সে.মি.
12. 12'25 পা. 13. 347089'28 কি.গ্রা. 14. 576 15. 1 সে.মি.
16. উচ্চতার 50%

ত্রিকোণমিতি

2(b) (i) $\frac{5\pi}{3}$ রেডিয়ান। (ii) 12π রেডিয়ান। 4. (i) 50 গ্রেড। (ii) 132 গ্রেড 57 মি. 90 সে.। (iii) 107 গ্রেড 50 মি.। (iv) −41 গ্রেড 30 মি.। (v) 126 গ্রেড 17 মি. $46\frac{4}{63}$ সে.। (vi) 150 গ্রেড। (vii) −25 গ্রেড। (viii) 211 গ্রেড 11 মি. $11\frac{1}{9}$ সে. 5. (i) $40°30'$ (ii) $27°\,3'30''$ (iii) $-73°10'36'3''$ (iv) $216°15'27'936''$ (v) $120°$ (vi) $-114°$ (vii) $35°$ (viii) $565°12'$ 6. (i) $\frac{\pi}{8}$ রেডিয়ান। (ii) $\frac{11\pi}{18}$ রেডিয়ান। (iii) $\frac{193\pi}{720}$ রেডিয়ান। (iv) $-\frac{12317\pi}{10800}$ রেডিয়ান। v) $\frac{18883\pi}{64800}$ রেডিয়ান। (vi) $\frac{3\pi}{4}$ রেডিয়ান। (vii) $0'206125\pi$ রেডিয়ান। (viii) $0'416\pi$ রেডিয়ান।
7. 36°, 60°, 84° 8. 7°12', 86°24', 86°24' 9. 40 গ্রেড, 80 গ্রেড, 120 গ্রেড এবং 160 গ্রেড। 10. $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান। 11. 99° 12. $\frac{5\pi}{9}$ রেডিয়ান।

13. 83 গ্রেড 33 মি. $33\frac{1}{3}$ সে.। 14. $141^\circ\ 49'\ 5\frac{5}{11}''$ 15. $81^\circ, 9^\circ$

16. $\dfrac{641^\circ}{22}, \dfrac{619^\circ}{22}$ 17. $112\frac{1}{2}^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ$; $\dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}$.

18. $110^\circ 28' 30''$ এবং $2^\circ 1' 30''$ 19. $\dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান এবং $\dfrac{3\pi}{10}$ রেডিয়ান।

20. $30^\circ, 45^\circ, 63^\circ$ 23. 44 মিটার। 24. $11^\circ 27' 16\frac{4}{11}''$

25. 0·16 ইঞ্চি। 26. $112\frac{56}{187}$ সে. মি. 28. $24^\circ, 60^\circ, 96^\circ$

29. $\dfrac{2420}{45563}$ রেডিয়ান, $\dfrac{2178}{45563}$ রেডিয়ান এবং $\dfrac{19800}{6509}$ রেডিয়ান।

30. $41\frac{19}{24}$ মিটার। 31. 1078·0291 মাইল। 32. 1011·285 কি.মি.

33. 5·94 কি মি./ঘণ্টা। 34. 576·1904 মি/সে. 35. 10°

36. 1·0235 কি. মি./সে. (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 2

34. 0 35. 1 36. 0 37. 0 38. 0 39. $\sec\theta \operatorname{cosec}\theta$
40. 0 41. 1.

প্রশ্নমালা 3

1. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 3. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $-\frac{1}{3}$. 7. $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{x}$,

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ 8. 0 11. $-\dfrac{56}{33}$

12. $(2+\sqrt{3})$ 15. $\frac{9}{14}$ 16. $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ 17. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}$.

প্রশ্নমালা 4

11. $-\frac{1}{2}$ 12. 5 13. $1\frac{1}{2}$ 14. 0 15. 1 16. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 17. -1

প্রশ্নমালা 5

1. 30° 2. 30° 3. 45° 4. 90° 5. 0° এবং 45° 6. 30°
7. 30° 8. 30° এবং 90° 9 এক্ষেত্রে 0° হইতে 90°-এর মধ্যে θ-এর কোন

মান নাই। 10. 30° 11. 60° 12. 45° 13. $r=4$, $\theta=30$
14. 1 এবং $\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 6

1. 20 মি. 2. 13·856 মি. 3. 15 মি. 4. 30° 5. 57·156 মি.
6. 259·8 মি. 7. 125 মি. 8. 25 মি., 35·35 মি. 9. $(3+2\sqrt{3})a$ মি.
10. 94·64 মি. 11. 0·366 মা, 12. 1·732 মি. 13. 118·3 মি.
14. 20·784 মি. 15. 11·0848 মি. 16. 219·6 মি. 17. 47·32 মি.
18. 30°, 103·92 ফুট 19. 66·95 মি. 20. 7·608 মি. 21. 94·64 মি.
54 64 মি. 22. $h(\cot\beta-\cot\alpha)$, $h(\cot\beta+\cot\alpha)$ 23. 68·3 মি.
24. 12 মি. 30 সে. 25. 70·7 মি.।

পরিশিষ্ট

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী ঃ

জ্যামিতি

বিভাগ-ক

1. নিম্নে প্রত্যেকটি প্রশ্নের একাধিক উত্তর দেওয়া আছে। ঐ উত্তরগুলির মধ্যে যে সকল উত্তরকে সঠিক বলিয়া মনে কর তাহাদের পার্শ্বে '√' চিহ্ন দাও।

(a) কোন বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r এবং P উক্ত বৃত্ততলে অবস্থিত একটি বিন্দু। যদি $OP<r$ হয় তবে P বিন্দু বৃত্তটির (i) অন্তঃস্থ বিন্দু (ii) বহিঃস্থ বিন্দু (iii) উপরিস্থিত বিন্দু।

(b) A এবং B দুইটি বিন্দু। এই দুই বিন্দুগামী বৃত্তের সংখ্যা (i) একটি (ii) দুইটি (iii) অসংখ্য।

(c) O কেন্দ্রস্থ বৃত্তের $\overline{PQ}$ এবং $\overline{MN}$ দুইটি সমান্তরাল জ্যা। উক্ত জ্যাদ্বয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুইটি (i) পরস্পর সমান্তরাল (ii) পরস্পরকে ছেদ করে (iii) একই সরলরেখা।

(d) P বৃত্তের কেন্দ্র, $\overline{AB}$ বৃত্তটির জ্যা এবং $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ হইলে

(i) ক্ষেঃ $\triangle PAB = 2$ ক্ষেঃ $\triangle PAQ$

(ii) ক্ষেঃ $\triangle PAB \neq 2$ ক্ষেঃ $\triangle PAQ$

(e) O কেন্দ্রস্থ বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সে. মি., P বৃত্তটির অন্তঃস্থবিন্দু। $OP=3$ সে. মি. হইলে P বিন্দুগামী ক্ষুদ্রতম জ্যায়ের দৈর্ঘ্য (i) 5 সে. মি. (ii) 4 সে. মি. (iii) 8 সে. মি.

2. (a) ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং A বিন্দু $\overset{\frown}{BCD}$ চাপের অনুবন্ধী চাপের উপর অবস্থিত। $\angle BAD$-এর পরিমাপ 75° হইলে $\angle BOD$-এর পরিমাপ (i) 15° (ii) 150° (iii) 105°.

(b) কোন বৃত্তের $\overset{\frown}{ABC}$ চাপের অনুবন্ধী চাপের উপরিস্থিত P এবং Q দুইটি বিন্দু। $\angle APC$-এর পরিমাপ 27° হইলে $\angle AQC$-এর পরিমাপ (i) 27° (ii) 54° (iii) 63° (iv) 153°.

(c) PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। ইহার $\angle$PRQ-এর পরিমাপ 60° হইলে $\angle$QSP-এর পরিমাপ (i) 30° (ii) 60° (iii) 120°

(d) $\overline{MN}$-এর একই পার্শ্বে P এবং Q বিন্দু অবস্থিত। M, N, P এবং Q বিন্দু চারিটি তখনই সমবৃত্ত হইবে যদি (i) $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ হয়

(ii) $\angle$MPQ $\cong$ $\angle$NQP হয়

(iii) $\angle$MPN $\cong$ $\angle$NQM হয়।

3. (a) PAQ বৃত্তের ব্যাস $\overline{PQ}$ হইলে $\angle$PAQ এর পরিমাপ (i) 60° (ii) 90° (iii) 180°.

(b) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle$BAC-এর পরিমাপ 45° হইলে $\angle$BDC-এর পরিমাপ (i) 45° (ii) 90° (iii) 135°.

(c) PQRS চতুর্ভুজটি তখনই বৃত্তস্থ হইবে যদি

(i) $m\angle PQR + m\angle PSR = 180^\circ$ হয়

(ii) $\angle$PQR $\cong$ $\angle$PSR হয়

(iii) $m\angle PQR + m\angle QRS = 180^\circ$ হয়।

(d) ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলির অনুপাত যথাক্রমে 1 : 4 : 5 : 2 হইলে চতুর্ভুজটি (i) বৃত্তস্থ হইবে

(ii) বৃত্তস্থ হইবে না।

4. (a) একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ সরলরেখার সংখ্যা (i) একটি (ii) দুইটি (iii) অসংখ্য।

(b) কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{AP}$ উক্ত বৃত্তের স্পর্শক হইলে $\angle$APQ-এর পরিমাপ (i) 90° (ii) 180°.

(c) বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উক্ত বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সংখ্যা (i) একটি (ii) দুইটি (iii) অসংখ্য।

(d) কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর

(i) একটি বিন্দুতে মিলিত হয়

(ii) সমান্তরাল।

(e) দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হইলে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (i) স্পর্শ করতে পারে না (ii) অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে (iii) বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে।

(*f*) দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু যথাক্রমে A এবং B ; বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিলে (i) $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BP}$ (ii) $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BP}$ (iii) A, P এবং B বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

5 (*a*) $\overleftrightarrow{MN}$, $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বাহুকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AP : PB = AQ : QB হয় তবে PBCQ চতুর্ভুজটি (i) সামান্তরিক (ii) আয়তক্ষেত্র (iii) ট্রাপিজিয়াম।

(*b*) $\triangle ABC$-এর $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ বাহুর উপর P এবং Q এরূপ দুইটি বিন্দু যে $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ যদি $\overline{BP}$, $\overline{PA}$ এবং $\overline{QC}$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2 সে.মি., 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি. হয় তবে $\overline{BQ}$-এর দৈর্ঘ্য (i) 6 সে.মি. (ii) 3 সে.মি. (iii) $2\frac{2}{3}$ সে.মি.

6. (*a*) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে উহারা (i) সদৃশ হইবে (ii) সদৃশ নাও হইতে পারে।

(*b*) $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বদা

(i) সর্বসম হইবে

(ii) সমক্ষেত্রফল বিশিষ্ট হইবে

(iii) সদৃশকোণী হইবে।

(*c*) বর্গক্ষেত্র এবং রম্বস পরস্পর (i) সদৃশ (ii) সদৃশ নয়।

(*d*) $\triangle PQR$ এবং $\triangle ABC$-এর $\angle A \cong \angle P$ এবং PQ : AB = PR : AC হইলে ত্রিভুজদ্বয় (i) সদৃশকোণী হইবে

(ii) সর্বসম হইবে

(iii) সমক্ষেত্রফল বিশিষ্ট হইবে।

7. (*a*) $\triangle PQR$-এর $\angle QPR$ সমকোণ এবং $\overline{PD} \perp \overline{QR}$ হইলে $\triangle PDQ$ এবং $\triangle PDR$ সর্বদা পরস্পর (i) সদৃশ (ii) সর্বসম (iii) সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট।

(*b*) $\triangle DEF$-এর $\angle EDF$ সমকোণ এবং $\overline{DM} \perp \overline{EF}$ হইলে $\overline{DM}$,

(i) $\overline{EM}$ এবং $\overline{FM}$-এর মধ্যসমানুপাতী

(ii) $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$-এর মধ্যসমানুপাতী।

(*c*) দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x সে. মি. এবং y সে. মি. হইলে রেখাংশ দুইটির মধ্যসমানুপাতীর দৈর্ঘ্য (i) $(x+y)$ সে. মি. (ii) $\sqrt{x^2+y^2}$ সে. মি. (iii) $\sqrt{xy}$ সে. মি.

8. (a) কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি উহা তৃতীয় কোণের পরিমাপের সমান হইলে ত্রিভুজটি

(i) সমদ্বিবাহু হইবে

(ii) সমকোণী হইবে

(iii) স্থূলকোণী হইবে।

(b) ABCD আয়তক্ষেত্রের

(i) $AB^2+AC^2=BC^2$

(ii) $AC^2+BC^2=AB^2$

(iii) $AB^2+BC^2=AC^2$.

(c) যদি $\triangle ABC$ সমকোণী হয় তবে উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত

(i) 1 : 1 : 2 হইতে পারে

(ii) 3 : 4 : 5 হইতে পারে

(iii) 2 : 3 : 4 হইতে পারে।

(d) একটি সমকোণী ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপের অনুপাত

(i) 1 : 2 : 3 হইতে পারে

(ii) 2 : 3 : 4 হইতে পারে

(iii) 3 : 4 : 5 হইতে পারে।

বিভাগ-খ

1. (a) A এবং B দুইটি বিন্দু। এই দুইটি বিন্দুগামী একটির বেশি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় কি? $\overline{AB}$ বৃত্তটির কি? A এবং B বিন্দুগামী সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এরূপ একটি বিন্দু C হইলে A, B, C বিন্দুগামী কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব? A B এবং C বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু কিরূপে নির্ণয় করিবে?

(b) O কেন্দ্রস্থ বৃত্তের ব্যাস নহে এরূপ একটি জ্যা $\overline{AB}$ এবং D বিন্দু $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু। $\overline{OD}$-এর উপর C একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

2. (a) P কেন্দ্রস্থ বৃত্তে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ দুইটি জ্যা। উক্ত জ্যাদ্বয়ের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পরকে ছেদ করিবে কি? যদি ছেদ করে তবে ঐ ছেদ বিন্দু কি P? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(b) $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা। O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র। O বিন্দু

হইতে $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$-এর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$; যদি $\overline{OM} \cong \overline{ON}$ হয় তবে $AB = CD$ হইবে কি? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও।

3. (*a*) ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হইলে $\angle AOC$ এবং $\angle ABC$-এর মধ্যে সম্বন্ধ কি? $\triangle PQR$-এর $\angle QPR$ সমকোণ এবং M বিন্দু ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র। দেখাও যে, $m\angle PMR = 2m\angle PQR$.

(*b*) ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র P এবং ব্যাস $\overline{BD}$ হইলে $\angle APD$ এবং $\angle ABD$-এর পরিমাপ নির্ণয় কর।

4. (*a*) অর্ধ বৃত্তস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ এবং স্থূলকোণের মধ্যে কোন্‌টি? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও। অর্ধবৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কি?

(*b*) কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$; P এবং Q একই অর্ধবৃত্তাংশস্থ দুইটি বিন্দু। $\triangle PAB$ এবং $\triangle QAB$ কি সর্বদা সমান ক্ষেত্রযুক্ত হইবে? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও।

5. (*a*) ABCD চতুর্ভুজের $\angle BAC \cong \angle BDC$; দেখাও যে ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

(*b*) ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম; $\angle DAB$-এর পরিমাপ 105° হইলে অপর কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।

6. (*a*) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের পরিমাপের সমষ্টি কত? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(*b*) PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ব্যাস PQ; $\angle RSQ$-এর পরিমাপ 30° হইলে $\angle PQR$-এর পরিমাপ কত?

7. (*a*) DEFG চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে কি? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(*b*) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle ABD$, $\angle BAC$ এবং $\angle ADB$-এর পরিমাপ যথাক্রমে 42°, 48° এবং 52° হইলে চতুর্ভুজটির প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

8. (*a*) বৃত্তের স্পর্শকের সংজ্ঞা দাও। বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং উহার ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের মধ্যে সম্বন্ধ কি? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(*b*) কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{QM}$ স্পর্শক। A, বৃত্তটির উপরিস্থিত একটি বিন্দু। $\angle APQ$-এর পরিমাপ 30° হইলে $\angle AQM$-এর পরিমাপ কত? চিত্রসহ উত্তর দাও।

9. (a) বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে O কেন্দ্রিক বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক রেখাংশদ্বয় যথাক্রমে $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$; $\overline{OA}, \overline{OB}$ এবং $\overline{OP}$ অঙ্কন কর। দেখাও যে

(i) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

(ii) $m\angle OPA = m\angle OPB$.

(b) O কেন্দ্রিক বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু T হইতে বৃত্তে $\overline{TA}$ এবং $\overline{TC}$ স্পর্শক টানা হইল। যদি $m\angle ATC = 48^\circ$ হয় তবে $m\angle AOC$ কত? AOCT চতুর্ভুজটিকে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলা যায় কি?

10. (a) দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। উহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 3 সে মি. এবং 5 সে.মি. হইলে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(b) পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে এরূপ তিনটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ; যদি $\triangle PQR$-এর বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সে.মি., 11 সে. মি. এবং 13 সে.মি. হয় তবে বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. (a) (i) এরূপ একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর যাহার AB=5 সে. মি., CA=4 সে.মি. এবং BC=6 সে. মি. (ii) $\angle ABC$ এবং $\angle BCA$-এর অন্তঃ সমদ্বিখণ্ডক দুইটি অঙ্কন কর। মনে কর, অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (iii) $\overline{PM} \perp \overline{BC}$ অঙ্কন কর যাহাতে M বিন্দু $\overline{BC}$-এর উপর অবস্থিত হয়। (iv) $\triangle ABC$-এর অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর।

(b) $\triangle ABC$-এর অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্র P, $\angle PBC$, $\angle PCA$ এবং $\angle BAC$-এর পরিমাপ যথাক্রমে x°; $2x^\circ$ এবং $3x^\circ$ হইলে x-এর মান কত?

12. (a) কোন পরিবর্ধনের পরিবর্ধন কেন্দ্র O এবং পরিবর্ধনের পরিমাণ গুণক $m=3$-এর সাপেক্ষে A এবং B বিন্দুদ্বয়ের প্রতিবিম্ব যথাক্রমে A_1 এবং B_1 হইলে $\overline{AB}$ এবং $\overline{A_1B_1}$-এর মধ্যে সম্পর্ক কি? চিত্রনটি সম্পন্ন কর।

(b) কোন পরিবর্ধনের পরিবর্ধন কেন্দ্র O এবং পরিবর্ধানর পরিমাণ গুণক $m=2$-এর সাপেক্ষে ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব $\triangle A_1B_1C_1$ ধরিয়া চিত্রনটি সম্পাদন কর। $\triangle ABC$ এবং $\triangle A_1B_1C_1$-এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

13. (a) $\triangle ABC$-এর $\overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ অঙ্কন করাতে $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$-কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, AD : BD=AE : CE.

(b) $\triangle$PQR-এর $\overline{QR} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন করায় $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PQ}$ এবং $\overline{PR}$-কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি PM = 2 সে.মি., PQ = 5 সে.মি. এবং RN = 6 সে.মি. হইলে PN-এর দৈর্ঘ্য কত ?

14. (a) DEF একটি ত্রিভুজ। A এবং B বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $\overline{DE}$ এবং $\overline{DF}$-এর উপর অবস্থিত। যদি $\frac{DA}{AE}=\frac{DB}{BF}$ হয় তবে $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ হইবে কি ? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও।

(b) ত্রিভুজ KPG-এর $\overline{PG}$ বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা $\overline{KP}$ এবং $\overline{KG}$ বাহুকে যথাক্রমে M এবং S বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি $KM = x$, $MP = 3$, $KS = 10$ এবং $SG = (2x-4)$ হয় তবে x-এর মান কত ?

15. (a) $\triangle$ABC-এর $\angle$A সমকোণ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ হইলে $\triangle$ABD, $\triangle$ADC এবং $\triangle$ABC-এর মধ্যে সম্বন্ধ কি ? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(b) 1·5″ এবং 2″ দৈর্ঘ্যের রেখাংশ দুইটির মধ্য সমানুপাতীর দৈর্ঘ্য কত ?

16. (a) $\triangle$ABC-এর $BC^2 = AB^2 + AC^2$ হইলে $\angle$BAC কোণের পরিমাপ কত ? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(b) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $3x : 4x : 5x$ হইলে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণের মান কত ?

পরিমিতি

1. (a) একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য $3x$, প্রস্থ $2x$ এবং উচ্চতা x হইলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(i) $14x^2$ (ii) $22x^2$ (iii) $28x^2$.

(b) কোন ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য 5 মি. এবং প্রস্থ 4 মি. ; ঘরটির উচ্চতা 3 মি. হইলে ঘরটির মধ্যে বৃহত্তম মাপের যে দণ্ড রাখা যাইবে তাহার দৈর্ঘ্য (i) $2\sqrt{15}$ মি. (ii) $4\sqrt{15}$ মি. (iii) $2\sqrt{5}$ মি. (iv) $5\sqrt{2}$ মি.।

(c) কোন ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি. হইলে উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য (i) $\sqrt{3}\,a$ সে.মি. (ii) $\sqrt{2}\,a$ সে.মি. (iii) $\sqrt{6}\,a$ সে.মি.।

(*d*) একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করিলে উহার আয়তন পূর্বের আয়তনের
(i) দ্বিগুণ হইবে
(ii) ছয়গুণ হইবে
(iii) আটগুণ হইবে।

(*e*) কোন ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য কমাইয়া এক তৃতীয়াংশ করিলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল পূর্বের ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের (i) $\frac{1}{3}$ গুণ হইবে
(ii) $\frac{1}{9}$ গুণ হইবে
(iii) $\frac{1}{27}$ গুণ হইবে।

2. (*a*) একটি চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল x এবং উচ্চতা y হইলে উহার আয়তন (i) xy (ii) πx^2y (iii) $2xy$.

(*b*) একটি চোঙের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 2 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি. হইলে উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল
(i) 20π ব. সে মি. (ii) 18π ব. সে.মি.
(iii) 27π ব. সে মি.

(*c*) কোন গোলকের ব্যাসার্দ্ধ 3 সে.মি. হইলে :উহার ক্ষেত্রফল (i) 12π ব. সে.মি. (ii) 18π ব. সে.মি, (iii) 36π ব. সে.মি.

(*d*) m সে.মি. ব্যাস বিশিষ্ট কোন গোলক সম্পূর্ণরূপে জলে নিমজ্জিত হইলে গোলকটির দ্বারা অপসারিত জলের আয়তন (i) $\frac{\pi m^3}{6}$ সি সি. (ii) $\frac{4}{3}\pi m^3$ সি.সি. (iii) $4\pi m^2$

[সি.সি.→ঘন সেন্টিমিটার]

3 (*a*) কোন গোলকের ব্যাসার্দ্ধ দ্বিগুণ বর্ধিত করিলে উহার ক্ষেত্রফল পূর্বের ক্ষেত্রফলের (i) দ্বিগুণ হইবে
(ii) চারগুণ হইবে
(iii) নয়গুণ হইবে।

(*b*) একটি গোলকের ব্যাস কমাইয়া অর্ধেক করিলে উহার আয়তন পূর্বের আয়তনের (i) $\frac{1}{8}$ গুণ হইবে (ii) $\frac{1}{4}$ গুণ হইবে (iii) $\frac{1}{16}$ গুণ হইবে।

(*c*) কোন চোঙের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ এবং উচ্চতা উভয়েই একটি গোলকের ব্যাসার্দ্ধের সমান হইলে চোঙটির আয়তন গোলকটির আয়তনের (i) $\frac{1}{3}$ গুণ (ii) $\frac{2}{3}$ গুণ (iii) $\frac{3}{4}$ গুণ।

ত্রিকোণমিতি

[ত্রিকোণমিতির প্রশ্নের ক্ষেত্রে $0 < \theta \leqslant 90^\circ$ ধরিবে।]

1. নিম্নের প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তরের নীচে দাগ দাও :

(*a*) কোন কোণের পরিমাপ 90° হইলে কোণটি পরিমাপের বৃত্তীয়মান

(i) 2π রেডিয়ান (ii) π রেডিয়ান (iii) $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান।

(*b*) সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ (i) $66\frac{2}{3}$ গ্রেড (ii) 60 গ্রেড (iii) 50 গ্রেড।

(*c*) $3.\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান কোণের শতক পদ্ধতিতে মান (i) 90 গ্রেড (ii) 150 গ্রেড (iii) 180 গ্রেড।

(*d*) 1 রেডিয়ান সমান (i) π সমকোণ (ii) $\frac{\pi}{3}$ সমকোণ (iii) $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

(*e*) কোন কোণের পরিমাপ x° বা y গ্রেড বা z রেডিয়ান হইলে (i) $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{2z}{\ }$ (ii) $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{z}{\pi}$ (iii) $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{z}{2\pi}$.

2. (*a*) কোন ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপের অনুপাত 1 : 2 : 3 হইলে ডিগ্রী এককে কোণগুলির মান কত ?

(*b*) একটি ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপের অনুপাত 2 : 3 : 5 হইলে শতক পদ্ধতিতে উহাদের মান নির্ণয় কর।

(*c*) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 12 মিনিটে কত গ্রেড কোণ গঠন করিবে ?

(*d*) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা 10 মিনিটে কত ডিগ্রী কোণ গঠন করে ?

(*e*) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা 6 ঘণ্টায় কত গ্রেড কোণ গঠন করিবে ?

(*f*) কোন ঘড়ির সেকেণ্ডের কাঁটাটি 1 মিনিটে কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করিবে ?

3. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির বন্ধনীর মধ্যে উপযুক্ত পদ বসাইয়া শূন্য স্থান পূর্ণ কর :

(*a*) (i) $\operatorname{cosec}\theta \times$ —— $= 1$ (ii $\cos\theta \times$ —— $= 1$

(iii) $\sin\theta \times$ —— $= \cos\theta$ (iv) $\cot\theta \times$ —— $= \operatorname{cosec}\theta$

(v) $\tan^2\theta \times$ —— $= \sec^2\theta$ (vi) $\sec\theta \times$ —— $= \tan\theta$

(*b*) (i) $\cos^2\theta + (\quad) = 1$ (ii) $\tan^2\theta + (\quad) = \sec^2\theta$
(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta - (\quad) = \cot^2\theta$

(*c*) (i) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (\quad)$
(ii) $\sec^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ = (\quad)$
(iii) $\operatorname{cosec}^2 15^\circ - \cot^2 15^\circ = (\quad)$

(*d*) (i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে $\sec\theta = (\quad)$
(ii) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হইলে $\tan\theta = (\quad)$
(iii) $\operatorname{cosec}\theta = 2$ হইলে $\cos\theta = (\quad)$
(iv) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে $\sin^2\theta = (\quad)$
(v) $\sec\theta = \sqrt{2}$ হইলে $\cot 2\theta = (\quad)$
(vi) $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ হইলে $\operatorname{cosec}\theta = (\quad)$
(vii) $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ হইলে $\tan 3\theta = (\quad)$
(viii) $\sec 2\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ হইলে $\cos 4\theta = (\quad)$
(ix) $\cot\theta = \tan 30^\circ$ হইলে $\cos\theta = (\quad)$

(*e*) (i) $\sin\theta = \cos\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$
(ii) $\tan\theta = \cot\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$
(iii) $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$

(*f*) () $\sin\theta = \cos 2\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$
(ii) $\tan\theta = \cot 2\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$
(iii) $\sec\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$ হইলে $\theta = (\quad)$

4. সঠিক উত্তরের নীচে দাগ দাও :—

(*a*) $\cos 4\theta = \sin\theta$ হইলে θ-এর মান (i) 15° (ii) 18° (iii) 30°

(*b*) $\tan 2\theta = \cot 3\theta$ হইলে θ-এর মান (i) 18° (ii) 15° (iii) 10°

(*c*) $\operatorname{cosec} 5\theta = \sec\theta$ হইলে θ-এর মান (i) 12° (ii) 15° (iii) 20°
(iv) 30°

(*d*) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ হইলে $\tan(90^\circ - \theta)$-এর মান (i) 1 (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(iii) $\sqrt{3}$

(e) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে $\cos(90^\circ - \theta)$-এর মান (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii $\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(f) $\cos(\theta - 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে $\tan(\theta + 20^\circ)$-এর মান (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii) $\sqrt{3}$

(g) $\operatorname{cosec}(\theta + 25^\circ) = 2$ হইলে $\cot 6\theta$-এর মান (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii) 1

(h) $\sec(90^\circ - \theta) = \sqrt{2}$ হইলে $\sin 2\theta$-এর মান (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

উত্তরমালা (পরিশিষ্ট)

জ্যামিতি : বিভাগ—ক

1. (*a*) (i) (*b*) iii) (*c*) (iii) (*d*) (i) (*e*) (iii)
2. (*a*) (ii) (*b*) (i) (*c*) (ii) (*d*) (iii)
3. (*a*) (ii) (*b*) (i) (*c*) (i) (*d*) (i)
4. (*a*) (iii) (*b*) (i) (*c*) ii) (*d*) (ii) (*e*) (iii) (*f*) (iii)
5. (*a*) (iii) (*b*) (iii)
6. (*a*) (i) (*b*) (iii) (*c*) (ii) (*d*) (i)
7. (*a*) (i) (*b*) (i) (*c*) (iii)
8. (*a*) (ii) (*b*) (iii) (*c*) (ii) (*d*) (i)

বিভাগ—খ

5. (*b*) $75°, 105°, 75°$ 6. (*b*) $60°$
7. (*b*) $m\angle A=86°, m\angle B=80°, m\angle C=94°, m\angle D=100°$
8. (*b*) $30°$ অথবা, $150°$ 9. (*b*) $132°$
10. (*b*) 3 সে.মি. ; 5 সে.মি. ; 8 সে.মি. 11. (*b*) 20
13. (*b*) 4 সে.মি. 14. (*b*) 5 16. (*b*) $90°$

পরিমিতি

1. (*a*) (ii) (*b*) (iv) (*c*) (i) (*d*) (iii) (*e*) (ii)
2. (*a*) (i) (*b*) (i) (*c*) (iii) (*d*) (i)
3. (*a*) (iii) (*b*) (i) (*c*) (iii)

ত্রিকোণমিতি

1. (*a*) (iii) (*b*) (i) (*c*) (ii) (*d*) (iii) (*e*) (i)
2. (*a*) 30, 60, 90 (*b*) 40 গ্রেড, 60 গ্রেড, 100 গ্রেড (*c*) 80 গ্রেড
   (*d*) $5°$ (*e*) 200 গ্রেড (*f*) 2π রেডিয়ান
3. (*a*) (i) $\sin\theta$ (ii) $\sec\theta$ (iii) $\cot\theta$ (iv) $\sec\theta$ (v) $\operatorname{cosec}^2\theta$
   (vi) $\sin\theta$

(*b*) (i) $\sin^2\theta$ (ii) 1 (iii) 1

(*c*) (i) 1 (ii) 1 (iii) 1

(*d*) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) 0 (vi) 2

(vii) 1 (viii) $\frac{1}{2}$ (ix) $\frac{1}{2}$

(*e*) (i) $45°$ (ii) $45°$ (iii) $45°$

(*f*) (i) $30°$ (ii) $30°$ (iii) $30°$

4. (*a*) (ii) (*b*) (i) (*c*) (ii) (*d*) (iii) (*e*) (i) (*f*) (iii)
   (*g*) (i) (*h*) (ii)